

# Regenbögen

auf der

**10. Konferenz „Light and Color in Nature“,**

vom 16. bis 20. Juni 2010

am

St. Mary's College of Maryland.



Rainer Schmidt

[schmidtstock@arcor.de](mailto:schmidtstock@arcor.de)

Rainer Schmidt, Rostock, 2011, schmidtrostock@arcor.de

Titelbild: Rainer Schmidt, Tagungsgebäude „William Donald Schaefer Hall“, aufgenommen am 18. Juni 2010.

Dieser Aufsatz ist eine überarbeitete und korrigierte Fassung der folgenden Reihe:

Regenbögen auf der 10. Konferenz „Licht und Farbe in der Natur“

Teil 1 – Der tertiäre Regenbogen

Meteoros: Mitteilungsblatt des Arbeitskreises Meteore e.V.,  
ISSN:1435-0424, Bd.13, H.9, (2010), S.186-198.

Teil 2 – Kautiken und Katastrophen durch Regentropfen

Meteoros: Mitteilungsblatt des Arbeitskreises Meteore e.V.,  
ISSN:1435-0424, Bd.13, H.10, (2010), S.213-226.

Teil 3 – Sonderformen durch inhomogene Regentropfen

Meteoros: Mitteilungsblatt des Arbeitskreises Meteore e.V.,  
ISSN:1435-0424, Bd.13, H.12, (2010), S.263-277.

# 1 Inhalt

- 1 Inhalt
- 2 Vorwort
- 3 Der tertiäre Regenbogen
  - 3.1 Einleitung
  - 3.2 Überlieferte Berichte beobachteter Regenbögen dritter Ordnung
  - 3.3 Theorie der Regenbögen höherer Ordnung
    - 3.3.1 Der Regentropfen als ein transparentes kugelsymmetrisches Medium
    - 3.3.2 Der Regentropfen als ein transparentes axialsymmetrisches Medium
  - 3.4 Zusammenfassung und Diskussion zur Sichtbarkeit des tertiären Regenbogens
- 4 Kaustiken und Katastrophen durch Regentropfen
  - 4.1 Einleitung
  - 4.2 Der Regenbogen als Beugungs-Katastrophe
  - 4.3 Einführung in die Katastrophentheorie
  - 4.4 Katastrophentheorie und Mie-Streuung
  - 4.5 Zusammenfassung und Diskussion
  - 4.6 Äußere Reflexionen und regenbogenartige Kaustiken an Wassertropfen
- 5 Sonderformen durch inhomogene Regentropfen
  - 5.1 Einleitung
  - 5.2 Eine kurze Einführung in die Gradientenoptik
  - 5.3 Ein strahlentheoretischer Ansatz
  - 5.4 Regenbögen 0. und 1. Ordnung unter dem Einfluss eines Gradientenindex
  - 5.5 Zusammenfassung und Diskussion
- 6 Schlusswort
- 7 Anmerkungen
- 8 Quellen

## 2 Vorwort

Regenbögen sind im Allgemeinen sehr schön anzusehen und wurden daher schon immer mit Interesse diskutiert, sowohl in der Wissenschaft als auch in der Kunst. Will man eine befriedigende Erklärung für diese Erscheinungen finden, so gelangt man schnell von der geometrischen Optik über die Elektrodynamik bis hin zur Quantenmechanik. Auf der 10. Konferenz „Light and Color in Nature“ nahmen die Regenbögen eine zentrale Position ein. Mich persönlich haben die Vorträge zu diesem Thema sehr beeindruckt. Die Referenten präsentierten neben der Erweiterung der klassischen Regenbogentheorie auf abgeplattete Ellipsoide auch weitere Anwendungen interessanter Konzepte aus der modernen Mathematik und Physik auf das Problem der Regenbögen, zum Teil mit verblüffenden Ergebnissen. Die mathematisch fundierte Beschreibung dieser theoretischen Betrachtungen wirkte zudem noch sehr überzeugend.

Als ich nach der Konferenz gebeten wurde in einem Beitrag für METEOROS über ein Thema zu schreiben, entschied ich mich für die Regenbögen. Ursprünglich war nur ein Artikel für das Mitteilungsblatt vorgesehen. Schon während der Formulierung der ersten Seiten zum tertiären Regenbogen wurde sehr bald klar, dass eine zu oberflächliche Behandlung des gewählten Themas den Anspruch der Vorträge in keiner Weise gerecht werden würde. Viele wichtige und interessante Fakten hätten so nicht dargestellt werden können. Weiterhin wäre dieses auch unfair den Referenten gegenüber gewesen, deren Ziel es war eine möglichst große Menge an Informationen eingehend zu präsentieren und zu erläutern. Die Powerpointfolien, welche die Referenten freundlicherweise zur Verfügung stellten, waren daher mit Information im wahrsten Sinne des Wortes gesättigt, was oftmals auf Kosten der Kommentierung ging.

Anhand dieser Sachlage entschied ich mich schließlich die Vorträge zu den Regenbögen thematisch zu gruppieren und in einer Folge zu beschreiben. Nur so war es möglich die Problematik eingehender und ausführlicher zu behandeln. Die jeweiligen Powerpointpräsentationen bildeten dabei die Grundlage, wobei die auf den Folien enthaltene Information erst erschlossen und dann aufbereitet werden musste um sie schließlich in der Artikelreihe verwenden zu können. Diese Arbeit erwies sich als eine Wanderung auf einem Grat, der zusehends schmaler wurde. Je komplizierter die Materie, desto mehr zusätzliche Erläuterungen waren erforderlich um eine gewisse Verständlichkeit zu bewahren. Weiterhin sollte auch der ursprüngliche Charakter der Vorträge erhalten bleiben. Zum tertiären Regenbogen, welcher das erste Thema belegte, fasste Raymond L. Lee, Jr. in einem eigenständigen praxisorientierten Vortrag die erforderlichen Bedingungen zur Beobachtung dieses Regenbogens zusammen. Zu den Themen der „Kaustiken und Katastrophen“ (Kap. 4) und den „inhomogenen Regentropfen“ (Kap. 5) fehlte hingegen jeglicher praktischer Bezug. Da die Kapitel 4 und 5 nicht besonders populär sind, habe ich mir erlaubt einen praktischen Bezug an Hand der theoretischen Ergebnisse herzustellen, ohne dabei einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Damit verließ ich die ursprüngliche Linie der Vorträge um einerseits diese Themen für die vielen interessierten Beobachter im AKM e. V. und VdS zu erschließen und andererseits sollte dem Eindruck entgegengewirkt werden, dass die Erforschung der Regenbögen abgeschlossen sei. Verfeinerungen in bestehenden Theorien sind trotzdem immer noch möglich. Ohne diese praktische Ergänzung wäre es wohl besser gewesen die komplizierteren Themen wegzulassen. Ziemlich sicher bin ich mir in der Auffassung, dass die Referenten nichts gegen einen eingefügten praktischen Bezug einzuwenden hätten. Denn falls durch die Beobachtung irgendwann Fotos mit Beweiskraft für theoretisch vorhergesagte spezielle Erscheinungen von Regenbögen zu Verfügung gestellt werden können, so haben sie dann eine praktische Bestätigung für viele Jahre Forschungsarbeit. Durch dieses von Beginn an verfolgte Konzept entstand letztendlich eine Reihe in drei Teilen, welche alle in METEOROS erschienen sind und einen kleinen Überblick über den aktuellen Stand in der Erforschung der Regenbögen geben.

Auf ausdrücklichen Leserwunsch hin sind in diesem Aufsatz alle drei Teile dieser Reihe überarbeitet und korrigiert zu einem Bericht zusammengeführt worden.

### 3 Der tertiäre Regenbogen

#### 3.1 Einleitung

Der tertiäre Regenbogen, auch Regenbogen dritter Ordnung genannt, ist ein äußerst seltener und zugleich schwierig zu beobachtender Regenbogen. In diesem Kapitel soll der tertiäre Regenbogen ausführlich in Theorie und Praxis besprochen werden. Philip Laven [1] gibt in seiner Präsentation einen allgemeinen Überblick zum den gegenwärtigen Stand der Erforschung des dritten Regenbogen. Die spärlich vorhandenen Beobachtungsberichte wurden von Raymond L. Lee, Jr. [2] ausgewertet um auf der Grundlage neuer physikalischer Erkenntnisse die erforderlichen Beobachtungsbedingungen neu einzuschätzen. Die theoretischen Grundlagen entwickelte James A. Lock [3] in einem eigenen ausführlichen Vortrag.

#### 3.2 Überlieferte Berichte beobachteter Regenbögen dritter Ordnung

In der Literatur gibt es leider nur wenige brauchbare Beobachtungsberichte, welche in Tab. 1 zusammengefasst sind. Alle Berichte haben etwas gemeinsam. Mit Ausnahme der Beobachtung von Bergman [7] wurden alle Bögen bei tief stehender Sonne beobachtet. Die Helligkeitsangaben variieren je nach individuellem Empfinden. So hat Hartwell [8] die Erscheinung als sehr hell beschrieben, aber nur Varianten von Rot und Orange beobachtet. Pedgley [10] hingegen hat den dritten Bogen bei schwacher Helligkeit gesehen, schätzt aber die Sichtbarkeit als deutlich ein und erkennt sogar das Grün auf der Innenseite des Bogens. Bei Heilermann [9] wurde zwar keine Helligkeit/Sichtbarkeit angegeben, aber die Beobachtung der Entwicklung des tertiären Bogens über den gesamten Zeitraum und von mehreren Personen bei übereinstimmender Identifizierung, lässt mit einiger Wahrscheinlichkeit die Eigenschaft „gut sichtbar“ zu.

Beobachter	Beschreibung	Sonnenhöhe
Torbern Bergman 3. Sept. und 5. Sept. 1758, Nachmittag [7]	... und ich selbst hatte das Vergnügen, den dritten Regenbogen im vergangenen Sommer, zweimal im westlichen Gotland am 3. September und 5. am Nachmittag, zu beobachten. Der Himmel war sehr dunkel nach dem regen, aber die Farben waren so schwach, dass bei der ersten Gelegenheit nur die rote und die gelbe Farbe schwach, und das zweite Mal nur die rote sichtbar war. Sein Durchmesser - von der Sonnenhöhe geschätzt - bei etwa $84^\circ$ ... (Winkelabstand $42^\circ$ )	Keine Angabe
Charles Hartwell 28. Juli 1851 [8]	Nach einem starken Schauer und kurz vor Sonnenuntergang schien die Sonne und zeichnete einen schönen ersten Bogen auf die dunklen Wolken im Osten. Zur selben Zeit wurde im Nordwesten eine Erscheinung zerlegten Lichtes auf einer Wolke nicht sehr großen Ausmaßes, aus welcher aber offenbar Regen fiel, gesehen. Die Erscheinung nördlich der Sonne war sehr hell obwohl nur verschiedene Varianten von Rot und Orange beobachtet wurden. ... In Richtung Süden war das Phänomen weniger brillant und weniger ausgedehnt, aber deutlich nachvollziehbar etwa $15^\circ$ vom Horizont entfernt. ... Der Radius betrug etwa $40^\circ$ ...	Wenige Grad über dem Horizont
Johannes Heilermann 4. Sept. 1878 [9]	... ein kreisförmiges rotes Segment zeigte sich rechts über der Sonne bei einem Winkelabstand von etwa $40^\circ$ . Und dieses Segment breitete sich langsam weiter um die Sonne aus, während allmählich die anderen Farben entstanden, wie theoretisch erwartet. Schließlich näherte sich der runde Bogen fast dem Horizont, und der Beobachter ebenso wie seine Gefährten und Experten gleichermaßen verloren alle Zweifel daran, dass dies in der Tat der dritte Regenbogen war.	ca. $10^\circ$
David Pedgley 21. Mai 1986, 17:55 [10]	... es hatte gerade begonnen zu regen ... in dichten Vorhängen von mittleren Tropfen hell erleuchtet durch die tief stehende Sonne. Vom Balkon des vierten Stocks meines Hotelzimmers konnte ich nicht nur einen hellen primären, begleitet von einem mäßig hellen sekundären Bogen, sondern auch einen schwachen Bogen in Richtung zur Sonne, welcher von der Seite des Gebäudes abgeschirmt wurde, bequem sehen. Der Bogen funkelte, war aber deutlich für zwei oder drei Minuten sichtbar. Er hatte ungefähr die gleiche Größe wie der primäre Bogen, mit rot auf der Außenseite und innen grün.	ca. $7.4^\circ$

Tab. 1: Beobachtungsberichte über den dritten Regenbogen, zitiert von Lee [2]. Die Beschreibung wurde auszugsweise zusammengefasst und ist nicht wörtlich wiedergegeben. Die Sonnenhöhe wurde nachträglich bestimmt.

Bergman [7] hingegen gibt die Helligkeiten mit schwach an, macht aber keine Angaben zur Sichtbarkeit der Erscheinungen. Leider beschränkt sich die Zeitangabe der Beobachtung auf den Tagesabschnitt Nachmittag, womit eine Bestimmung der genauen Sonnenhöhe nicht möglich ist. Für den 3. September (In Schweden wurde der Gregorianische Kalender bereits 1753 eingeführt) wurde eine Sonnenhöhe für Visby um 14 Uhr Ortszeit von  $37,96^\circ$  und um 15 Uhr von  $33,66^\circ$  ermittelt. Erst um 19 Uhr steht die Sonne nur noch  $12,54^\circ$  über dem Horizont und liegt damit nicht mehr im Tagesabschnitt des Nachmittags. Möglicherweise ist die schwache Helligkeit in diesem Fall auf die größere Sonnenhöhe zurück zu führen.

### 3.3 Theorie der Regenbögen höherer Ordnung

#### 3.3.1 Der Regentropfen als ein transparentes kugelsymmetrisches Medium

Der Ausgangspunkt aller Betrachtungen ist die Mie-Streuung [4]. Die Mie-Streuung basiert auf den Maxwell'schen Feldgleichungen der Elektrodynamik, angewendet auf Polarkoordinaten mit einem homogenem, kugelsymmetrischem und transparentem Medium (hier Regentropfen) im Zentrum. Vom Standpunkt der Elektrodynamik aus betrachtet müsste man korrekterweise den Regentropfen als Dielektrikum betrachten. Der Einfachheit halber wird aber hier die Bezeichnung Regentropfen beibehalten. Die Mie-Streuung ist für eine numerische Berechnung sehr aufwendig, da die Lösung eine Reihe mit praktisch unendlich vielen Summen ist. Nach Willerding [5] benötigt man für die Berechnung der Streuamplituden an einem Wassertropfen mit einem Radius von 1000 Lichtwellenlängen mindestens 6000 Reihenglieder, die aufsummiert werden müssen. Effizienter geht es dagegen mit den Debye-Reihen. Debye hat die Reihe der Mie-Streuung nach möglichen Strahlengängen sortiert.

Hierbei treten folgende Debye-Reihen auf (hier nur von  $p = 0$  bis  $p = 5$ ):

- $p = 0$  – entspricht der äußeren Reflexion plus Beugung
- $p = 1$  – entspricht der direkten Transmission durch einen Wassertropfen
- $p = 2$  – entspricht 1 interne Reflexion (primäre Regenbogen)
- $p = 3$  – entspricht 2 interne Reflexionen (sekundärer Regenbogen)
- $p = 4$  – entspricht 3 interne Reflexionen (tertiärer Regenbogen)
- $p = 5$  – entspricht 4 interne Reflexionen (quartärer Regenbogen)

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass man fallbezogen die  $p$ -Reihen auch einzeln berechnen und die Reihe danach abbrechen kann, was sich günstig auf die Rechenzeit auswirkt.

#### GEOMETRIC RAINBOW ANGLES

Colour	$\lambda$ (nm)	$n$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
Violet	400	1.34451	139.57°	126.14°	37.56°	49.04°
Blue-Violet	425	1.34235	139.26°	126.69°	38.34°	48.05°
Blue	450	1.34055	139.01°	127.15°	38.99°	47.22°
Cyan	475	1.33903	138.79°	127.54°	39.54°	46.52°
Green	500	1.33772	138.60°	127.88°	40.01°	45.91°
Light Green	525	1.33659	138.44°	128.17°	40.42°	45.38°
Yellow-Green	550	1.33560	138.30°	128.43°	40.78°	44.92°
Yellow	575	1.33472	138.17°	128.66°	41.11°	44.51°
Orange	600	1.33393	138.06°	128.87°	41.40°	44.14°
Dark Orange	625	1.33322	137.95°	129.05°	41.66°	43.81°
Red	650	1.33257	137.86°	129.22°	41.90°	43.50°
Dark Red	675	1.33197	137.77°	129.38°	42.12°	43.22°
Bright Red	700	1.33141	137.69°	129.53°	42.32°	42.95°

Red outside
Red inside
Red outside
Red inside

Abb. 1<sup>1)</sup>: - Übersicht über die Ablenkwinkel in einem Regenbogen nach Laven [1],  $p = 2$ ,  $p = 3$  weg von der Sonne,  $p = 4$ ,  $p = 5$  zur Sonne hin. Es bedeuten: Colour - Spektralfarbe,  $\lambda$  - Wellenlänge,  $n$  - Brechungsindex Wasser/Luft,  $p = \{2, \dots, 5\}$  Debye-Reihen.

P. Laven hat eigene Rechnungen nach Debye mit unterschiedlichen Tropfenradien präsentiert. Aus Abb. 1 ergibt sich der Gesamtablenkwinkel für den Hauptregenbogen ( $p = 2$ ), für rot (700 nm) mit Blickrichtung zum Gegen Sonnenpunkt ( $180^\circ$ )  $42,31^\circ = 180^\circ - 137,69^\circ$  und für den Nebenregenbogen bei gleicher Blickrichtung und gleicher Wellenlänge  $50,47^\circ$ . Die Gesamtablenkwinkel für die Regenbögen dritter ( $p = 4$ ) und vierter Ordnung ( $p = 5$ ) kann man direkt aus Abb. 1 ablesen, allerdings bei einer Blickrichtung zur Sonne (Sonnenposition  $0^\circ$ ).

## DEBYE $r = 200 \mu\text{m}$

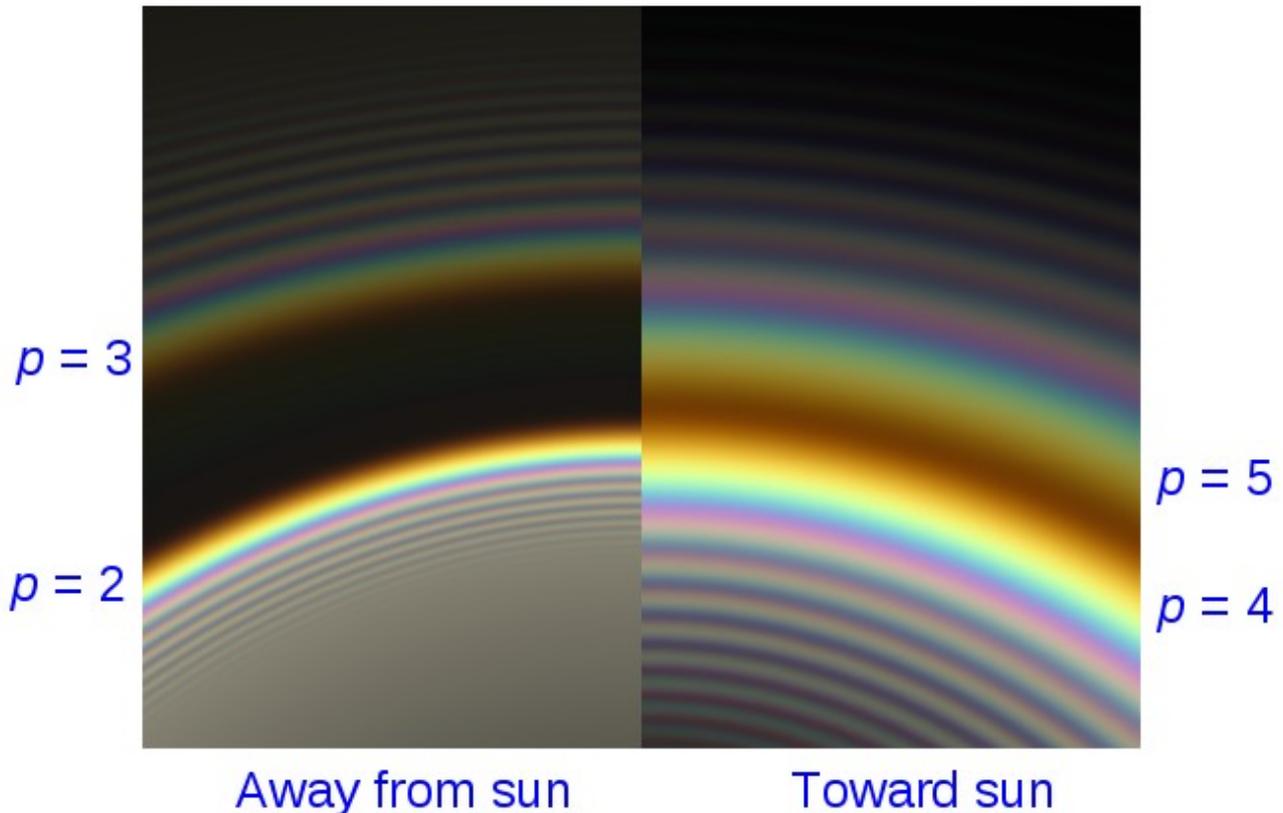


Abb. 2<sup>1)</sup>: – Ergebnis einer Computersimulation für einen Tropfenradius  $r = 200 \mu\text{m}$ , nach Laven [1].

Zum Vergleich sind in Abb. 2 und Abb. 3 links die Regenbögen erster und zweiter Ordnung und rechts die Regenbögen dritter und vierter Ordnung visualisiert. Auf der linken Seite beider Abb. 1 und Abb. 2 ist das dunkle Band (Alexanders dunkles Band) zwischen Haupt- und Nebenregenbogen ( $p = 2$ ) und ( $p = 3$ ) zu erkennen. Auffällig sind auch die Interferenzbögen, deren Anzahl mit wachsendem Tropfenradius kleiner wird, vergleiche Abb. 2 mit Abb. 3. Laven [1] führt Visualisierungen mit weiteren Tropfenradien von 10, 20, 50, 100, 200 und  $1000 \mu\text{m}$  vor und vergleicht die Ergebnisse auch direkt mit der Mie-Streuung und mit Simulationen von Les Cowley[6].

Das Problem der Regenbögen höherer Ordnung ( $p > 1$ ) ist, dass die Helligkeit mit wachsender Anzahl der Reflexionen im Regentropfen abnimmt. Daraus ergibt sich zwangsläufig die Fragestellung: Ist der tertiäre Regenbogen in der freien Natur überhaupt noch sichtbar? Die Betrachtung der in Tab. 1 zusammengefassten Beobachterberichte entscheiden diese Frage bereits. Die tertiären Regenbögen wurden zwar in sehr seltenen Fällen beobachtet, aber sie wurden mit hinreichender Sicherheit wahrgenommen. Somit kann die Frage wie folgt präzisiert werden: Unter welchen Bedingungen ist der tertiäre Regenbogen zu beobachten?

Die bisherigen theoretischen Betrachtungen liefern hierfür jedoch keinen Ansatz. Alle weiteren Ausführungen der Referenten Laven [1] und ganz besonders Lee [2] wurden unter dieser Fragestellung weitergeführt.

## DEBYE $r = 1000 \mu\text{m}$

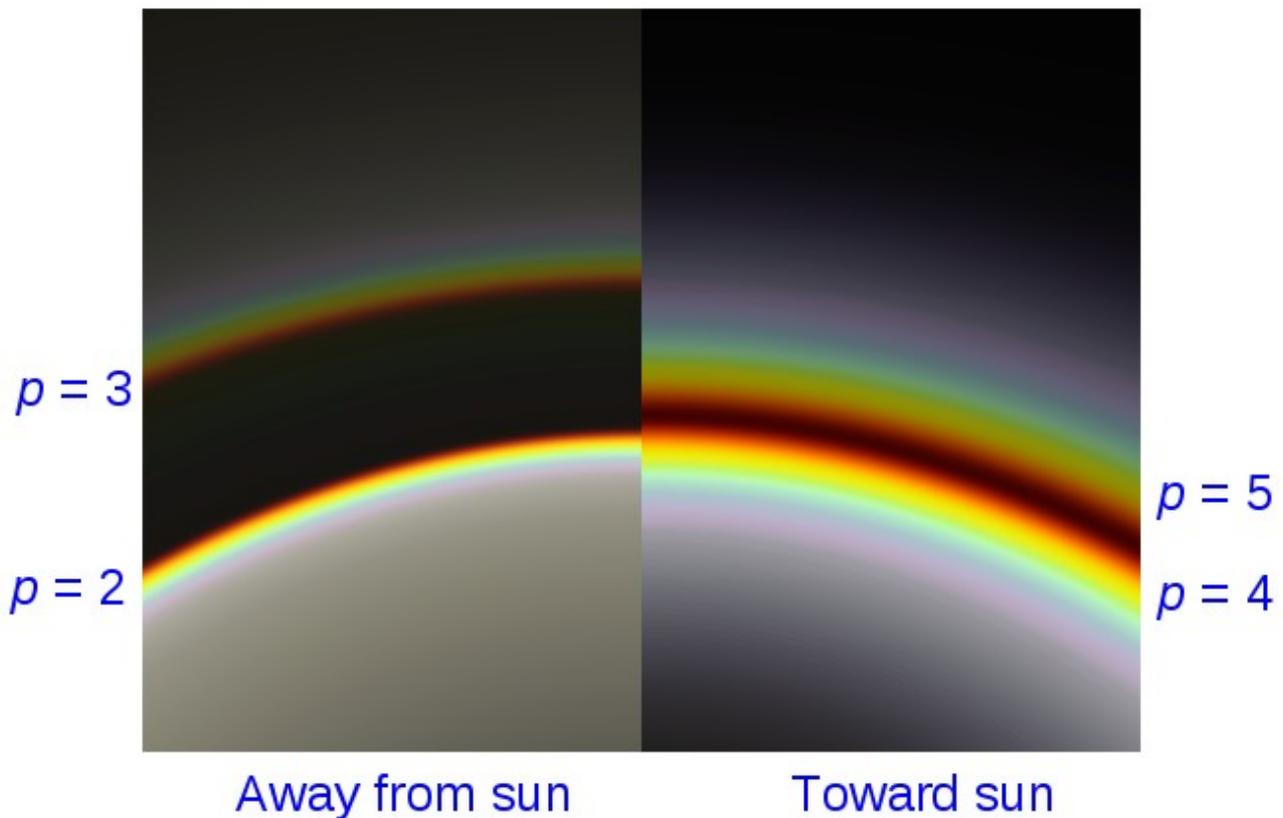


Abb. 3<sup>1)</sup>: – Ergebnis einer Computersimulation für einen Tropfenradius  $r = 1000 \mu\text{m}$ , nach Laven [1].

An dieser Stelle sei daran erinnert, das bis jetzt immer noch der Idealfall des kugelsymmetrischen, homogenen und transparenten Regentropfens gilt. Aus der Erfahrung heraus ist jedoch bekannt, dass in der Natur die Form des Regentropfens in Abhängigkeit von seinem Radius mehr oder weniger stark von der Kugelsymmetrie abweicht. Alle weiteren Betrachtungen der Referenten gingen in die Richtung, ein Tropfenmodell zu entwickeln, welches besser der realen Tropfengeometrie entspricht. In erster Näherung kann dieses erreicht werden, wenn statt kugelförmigen Tropfen elliptische Tropfen betrachtet werden. Das heißt, die klassischen Theorien müssen von der kugelsymmetrischen Tropfengeometrie auf die axialsymmetrische Tropfengeometrie erweitert werden. Diese Problematik wurde von Lock [3] in einem eigenen Vortrag behandelt. Doch zunächst bleiben wir bei der Kugelsymmetrie und schauen uns die Erweiterung der Airy-Theorie für alle  $p$  an<sup>2)</sup>. Ausgangspunkt aller Überlegungen bildet die Standard-Airy-Theorie mit der Fraunhofer-Beugung einer räumlichen Wellenfront an Tropfen mit einem ebenen Ausgang zur Streuung in einem Fernfeld. Die Airy-Theorie beschreibt nur den Haupt-Regenbogen und seine Interferenzbögen im weißen Licht, berücksichtigt die Polarisation des gestreuten Lichtes aber nur in grober Näherung. Es folgt im ersten Teil des Vortrages die Korrektur erster Ordnung, als Erweiterung der Airy-Theorie für alle Debye-Reihen ( $p$ ) (Tab. 2, 1.). Eine Lösung für die Polarisation des gestreuten Lichtes nach der Airy-Theorie wurde bereits von Können & de Boer [12] entwickelt. Sie fand Eingang in die Erweiterung der Airy-Theorie. Der Ansatz besteht nun darin, dass die Änderung der Elementarwelle proportional zur Änderung des Wertes der Airy-Funktion  $A_i$  erfolgen soll. Der Parameter  $h$  ist eine Funktion von  $p$  und  $n$ . Dieser Wert wurde von Können & de Boer [12], mit 4,9 für den Hauptregenbogen ( $p = 2$ ) und 28 für den zweiten Regenbogen ( $p = 3$ ), als Eingangsgröße verwendet. Vom Standpunkt der Polarisation aus betrachtet kommt ein neuer Term  $B$  (Tab. 2, 1.); (Tab. 2, 2.) hinzu, dessen Bedeutung für die weiteren Überlegungen bekannt sein muss. Für den gewöhnlichen Regenbogen ist  $B = 0$  (Tab. 2, 1.). Lock [3]

<b>Ohne Berücksichtigung der Polarisation</b>	
<b>1.</b>	$\Theta = \Theta_D + \Delta, \quad E(\Delta) \propto A_i \left[ \frac{-\Delta (2\pi a/\lambda)^{2/3}}{h^{1/3}} \right], \quad h = \frac{(p^2-1)^2 (p^2-n^2)^{1/2}}{p^2 (n^2-1)^{3/2}}, \quad B=0$
<b>Mit Berücksichtigung der Polarisation [12]</b>	
<b>2.</b>	$E(\Delta) \propto A_i \left[ \frac{-\Delta (2\pi a/\lambda)^{2/3}}{h^{1/3}} \right] + iB \frac{h^{1/6}}{(2\pi a/\lambda)^{1/3}} A_i' \left[ \frac{-\Delta (2\pi a/\lambda)^{2/3}}{h^{1/3}} \right]$
<b>Polarisation → TE (transversal elektrisch)</b>	<b>Polarisation TM → (transversal magnetisch)</b>
<b>Bestimmung von B nach der CAM-Theorie [13], [14] für alle p (± → + = Strahl 2; - = Strahl 1)</b>	
<b>3.</b>	$\theta_i = \theta_i^D + \epsilon; \quad \Theta = \Theta_D + \Delta; \quad \epsilon = \frac{\pm p}{(p^2-1)^{1/2}} \left( \frac{n^2-1}{p^2-n^2} \right)^{1/4} \sqrt{\Delta} + \frac{(3n^2-p^2n^2-2p^2)}{6(p^2-1)(p^2-n^2)} \Delta + \theta(\Delta^{3/2})$ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + a \left( \frac{p^2-n^2}{p^2-1} \right)^{1/2} \Delta \pm \frac{2a}{3} \frac{\Delta^{3/2}}{\sqrt{h}} + \theta(\Delta^2); \quad E(\Delta) \propto A_i \left[ \frac{-\Delta x^{2/3}}{h^{1/3}} \right] + iB \frac{h^{1/6}}{x^{1/3}} A_i' \left[ \frac{-\Delta x^{2/3}}{h^{1/3}} \right]$
$B^{TE} = \frac{3p^2(2n^2-p^2-1) - (p^2n^2+2p^2-3n^2) + 6(p^2-1)(p^2-n^2)}{6p^{4/3}(p^2-1)^{1/6}(p^2-n^2)^{2/3}(n^2-1)^{1/2}}$	$B^{TM} = \frac{3p^2(2n^2-p^2-1) - (p^2n^2+2p^2-3n^2) - 6(p^2+n^4-2p^2n^2)(p^2-1)(p^2-n^2)}{6p^{4/3}(p^2-1)^{1/6}(p^2-n^2)^{2/3}(n^2-1)^{1/2}} \frac{(p^2-n^4)}{(p^2-n^4)}$

Tab. 2<sup>1)</sup>: Funktionen und Ergebnisse der erweiterten Airy-Theorie nach Lock [3]. Es bedeuten:  $\Theta$  – Streuwinkel;  $\Theta_D$  – Descates-Winkel; E Elementarwelle (Beugung);  $A_i$  – Airy-Funktion (Regenbogenintegral);  $a$  – Tropfenradius;  $\lambda$  – Wellenlänge des Lichtes;  $h$  – numerischer Parameter, konstant für jedes  $p$ ;  $p$  – Debye-Reihe;  $n$  – Brechungsindex (Wasser);  $x$  – Größenparameter  $x = 2\pi a/\lambda$ ; CAM- Complex Angular Momentum theory;  $\epsilon$  - Elliptizitätsparameter.

führt an dieser Stelle die Komplexe Drehmoment-Theorie [13], [14] in die Erweiterung der Airy-Theorie für alle  $p$  ein. Wir setzen nun den elliptischen Polarisationszustand als gegeben voraus. Der elektrische Feldvektor  $\mathbf{E}$  ändert sich in diesem Fall in Betrag und Richtung. Der lineare und zirkulare Zustand sind Spezialfälle der elliptischen Polarisation. Dieser Zustand wird auch durch die kohärente Überlagerung von intensitätsgleichem Licht im rechts- und links- zirkularen Zustand bei hinreichend großer Phasendifferenz erreicht. Betrachtet man nun eine Lichtwelle als einen Energiestrom gequantelter und identischer Photonen, die mit einem Regentropfen in Wechselwirkung tritt, so wird ein gequantelter Transport des Drehimpulses auf die subatomaren Teilchen des Regentropfens übertragen. Photonen besitzen einen entweder völlig parallelen oder antiparallelen Spin in Bezug auf den Wellenvektor  $\mathbf{k}$ . Jedes einzelne Photon existiert in beiden möglichen Spin-Zuständen (rechts oder links) mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Würde man z. B. einen rechten Spin-Zustand häufiger messen als den linken, dann ergibt sich auch ein rechter Gesamtdrehimpuls für die subatomaren Teilchen des Regenbogens, was im Ergebnis elliptisch polarisiertes Licht in Form einer Überlagerung des rechtsdominierten Polarisationszustandes bei einer bestimmten Phasenbeziehung zum linken Polarisationszustand ist.

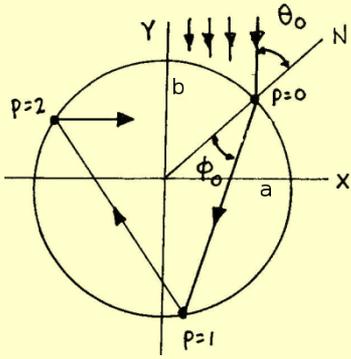
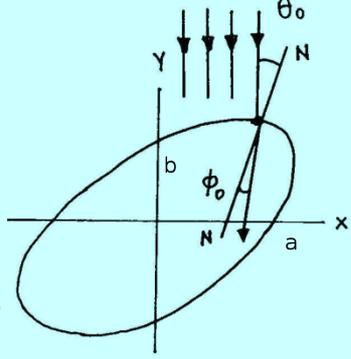
Genau an dieser Stelle ergibt sich ein Übergang von der klassischen Wellentheorie zur Quantenmechanik und einen Ansatz für die Einbindung der CAM-Theorie nach Nussenzweig [13], [14], siehe (Tab. 2, 3). Nussenzweig hat die aus der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie stammende Streu-Matrix (S-Matrix) als Grundlage für die Anwendung auf die Mie-Streuung genutzt. Ein wichtiges mathematisches Instrument hierfür ist die Partialwellenzerlegung. Wie bereits oben gesagt, ist die Mie-Streuung als eine unendliche Summe komplizierter Terme formuliert. Man kann nun jeden einzelnen Term auch als eine Partialwelle auffassen, die bis ins Unendliche aufsummiert, wieder eine Welle ergibt. Dieser Ansatz wurde auch von Nussenzweig [13], [14] verfolgt. Um eine unendliche Summe von Partialwellen in ein leichter anwendbares Integral umwandeln zu können, wurde der Drehimpuls in komplexen Zahlen dargestellt (modifizierte Watson-Transformation). Daher die Bezeichnung Komplexe Drehmoment Theorie. Mit dieser Theorie kann im Gegensatz zur Mie-Theorie, mit nur wenigen Termen bereits eine Streuamplitude berechnet werden.

Hiermit ist die Korrektur erster Ordnung abgeschlossen und der Term  $B$  wurde für beide Polarisationsrichtungen  $B^{\text{TE}}$  und  $B^{\text{TM}}$  bestimmt (Tab. 2, 3).

### 3.3.2 Der Regentropfen als ein transparentes axialsymmetrisches Medium

Im zweiten Teil des Vortrages von Lock [3] wurde die Erweiterte der Airy-Theorie auf elliptische Tropfenformen angewandt und es folgte eine Untersuchung über den Einfluss der Möbiusverschiebung auf die Amplitude. Möbius beobachtete diesen Effekt bei Laborexperimenten mit Kugeln optischen Glases [15]. Er stellte bei der Drehung der Kugeln um die senkrechte Achse eine seitliche Verschiebung von Regenbogen und Beugungstreifen (überzählige Bögen) fest. Bei einer kontinuierlichen Drehung um  $360^\circ$  verschoben sich Regenbogen und Beugungstreifen wie eine Sinusfunktion. Auf Grund der Messwerte konnte er nachweisen, dass die Glaskugeln elliptisch deformiert waren. Der Brechungsindex der Glaskugel betrug nach erneuter Bestimmung  $n = 1,51093$  und nach Herstellerangaben  $n = 1,51040$ .

Als Ansatz dient die Kugelsymmetrie und beide Regenbogenwinkel werden für alle  $p-1$  inneren Reflexionen bestimmt. Den Übergang zur Axialsymmetrie entwickelt Lock [3] in dem er den Ablenkwinkel  $\theta$  als Funktion des Elliptizitätsparameters  $\epsilon$  betrachtet. Die allgemeine Gleichung für den Regenbogenwinkel  $\Theta_p$  (Tab. 3) enthält allerdings einen Term  $G_p(\theta_0, \Phi_0, \xi)$  der in ausführlicher Darstellung lang und kompliziert ist. Eine Vereinfachung dieser Gleichung ist möglich in dem, ausgehend vom Winkel der Maximalablenkung für einen einfallenden Lichtstrahl, die rechte Teilellipse betrachtet wird und die Winkel  $\theta_0, \Phi_0$  auf den einfacheren Descates-Fall bezieht. In mehreren Schritten und Kunstgriffen wird somit in dieser Gleichung der Term  $2\theta_0 - 2p\Phi_0$  Null, so dass  $\theta_0$  verschwindet und in der neuen Form der Gleichung  $\Theta_p^R$  nur noch der Winkel  $\Phi_0$  im Descates-Fall auftritt. Diese Gleichung  $\Theta_p^R$  beschreibt den Regenbogenwinkel aus der Abweichung von der Kugelsymmetrie (erster Term) und vom Descates-Fall, wobei der  $\Phi$ - abhängige Term im zweiten Summanden die Amplitude und der  $\xi$ -Term die Oszillation darstellt. Selbst diese Lösung enthält auch wieder einen unbekanntem Term  $F_p(\phi_0^D)$ , welcher für die numerische Berechnung ausgewertet sein muss. Lock [3] berechnet diesen Term rekursiv durch die Anwendung des Tschebyschev-Polynoms zweiter Art auf  $\Phi_0$ , bezogen auf den Descates-Fall. Die daraus resultierenden Gleichungen  $F_{2m}$  und  $F_{2m+1}$  sind ebenfalls in Tab. 3 aufgeführt.

Kugelsymmetrie Def: $\epsilon=0=\frac{b}{a}-1; b=a$	Axialsymmetrie Def: $\epsilon=\frac{b}{a}-1; b\neq a$
	
$\Theta_p = (p-1)\pi + 2\theta_0 - 2p\phi_0$	$\Theta_p = (p-1)\pi + 2\theta_0 - 2p\phi_0 + \epsilon G_p(\theta_0, \phi_0, \xi) + \theta(\epsilon^2)$
$\Theta_p^D = (p-1)\pi + 2\theta_0^D - 2p\phi_0^D$	$\Theta_p^R = \underbrace{\Theta_p^D}_{\text{Kugel}} + \epsilon \underbrace{(-1)^{p+1} 8 \sin \phi_0^D \cos^3 \phi_0^D F_p(\phi_0^D)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\cos(\Theta_p^D 2\xi)}_{\text{Oszillation}} + \theta(\epsilon^2)$
	$F_{2m} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^{M-1+m} \frac{(M+m)!}{(M-1-m)!(2m)!} (2 \cos 2\phi_0^D)^{2m}$
	$F_{2m+1} = \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^{M-1+m} \frac{(M+1+m)!}{(M-1-m)!(2m+1)!} (2 \cos 2\phi_0^D)^{2m+1}$

Tab. 3<sup>1)</sup>: Regenbogenwinkel  $\Theta_p$  und Descartes-Winkel  $\Theta_p^D$  für Tropfen mit kugelsymmetrischer Geometrie und  $\Theta_p$ ,  $\Theta_p^R$  für Tropfen mit axialsymmetrischer Geometrie, jeweils für alle  $p-1$ , nach Lock [3];  $\epsilon$  – Elliptizitätsparameter;  $\xi$  – Neigungswinkel der Ellipse zur Normalform;  $R$  in  $\Theta_p^R$  bezieht sich auf den rechten Teil der Halbellipse (siehe Abbildung).

In Tab. 3 sind wieder die Ergebnisse im Vergleich von Kugelsymmetrie und Axialsymmetrie stark schematisiert dargestellt. Bereits der flüchtige Blick auf die Tabelle 3 zeigt, dass der mathematische Aufwand bereits bei der Betrachtung einer einfachen Ellipse erheblich steigt.

Das Modell zur Berechnung von Regenbögen höherer Ordnung bei einer elliptischen Tropfenform ist hiermit abgeschlossen. Die Ergebnisse werden nachfolgend diskutiert.

### 3.4 Zusammenfassung und Diskussion zur Sichtbarkeit des tertiären Regenbogens

Das oben besprochene Modell von Lock [3] liefert in der numerischen Berechnung die größte Empfindlichkeit bei einer Abweichung von der Kugelsymmetrie für  $p = 8$ . Der Betrag der Amplitude erreicht hier mit 4,55 ein Maximum (Tab. 4). Die Möbiusverschiebung ist nahe Null für  $p = 3$ , bei einem Betrag der Amplitude von 0,13.

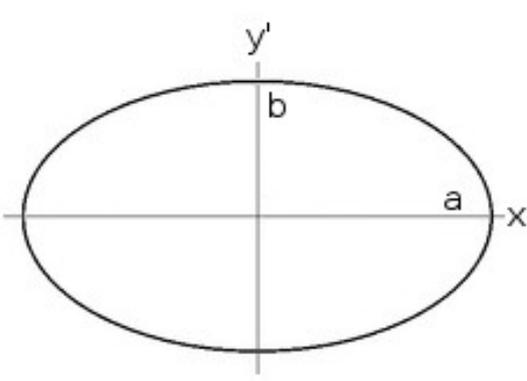
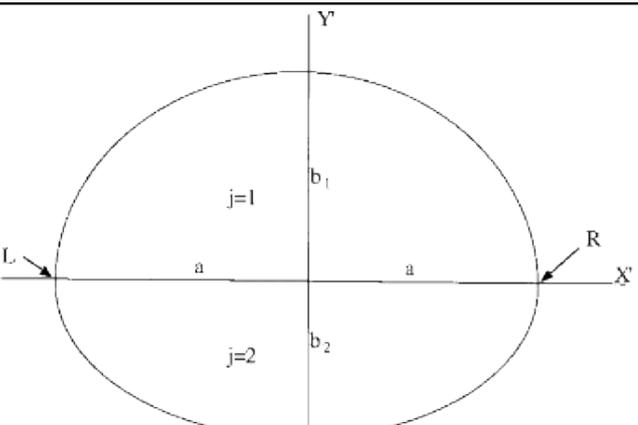
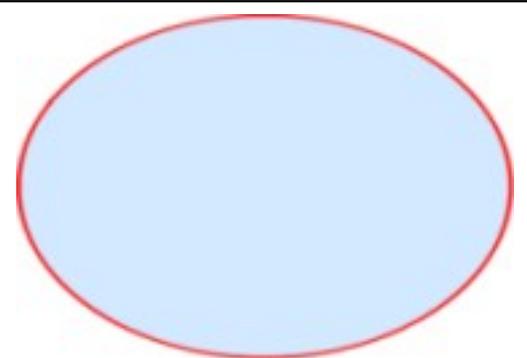
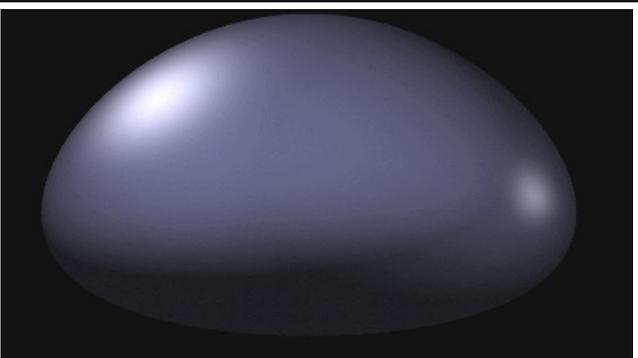
Debye-Reihen (p)	Betrag der Amplitude
2	2,30
4	3,62
6	4,51
<b>8</b>	<b>4,55</b>
10	3,56

Tab. 4: Auswahl einiger Ergebnisse der Modellrechnung nach Lock [3];  $n = 1,333$ ;  $\phi_0^D \approx 45^\circ$ ;

Laven [1] berichtete in seiner Präsentation von einer weiteren Modellrechnung für die Streuung an einem Tropfen mit modifizierter Geometrie. Hierbei handelt es sich um einen Körper, der im Querschnitt zwei ungleiche Halbellipsen zeigt und als deformierter elliptischer Körper immer noch die Bedingungen der

Axialsymmetrie erfüllt (Tab. 5). Diese modifizierte Geometrie geht auf einem Vorschlag von Adler; Lock und Stone [16] zurück und wird in der Literatur dem Aussehen nach als "hamburger buns" oder "burgeroids" bezeichnet. Mit der Entwicklung dieses Tropfenmodells haben Lock; Adler; Stone und Zajak [16], [17] bereits Ergebnisse publiziert, welche Laven [1] auszugsweise zitiert. Das wesentliche Resultat beider Publikationen ist, dass die Intensität des tertiären Regenbogen ( $p = 4$ ) im Verhältnis zum kugelsymmetrischen Tropfen um den Faktor 13 „verstärkt“ sein kann. Berechnet für einen Tropfenradius von  $a \approx 700 \mu\text{m}$ , und  $b/a = 0.95$ . Ein derart „verstärkt“ erscheinender tertiärer Regenbogen wäre diesem Modell zufolge aber nur bei einer Sonnenhöhe von  $h > 50^\circ$  realistisch. Dieses Resultat stimmt nicht mit der Beobachtung überein. Die bisher beobachteten tertiären Regenbögen traten hauptsächlich bei einer Sonnenhöhe von  $h < 12^\circ$  auf (Tab. 1). Es sind daher weitere Untersuchungen zur Verbesserung des Tropfenmodells erforderlich.

Offenbar wurden auch neuere Streumodelle im Team um Henrik Wann Jensen an der University of California, San Diego in Zusammenarbeit mit der Universität Zaragoza, unter anderem auch für die "hamburger buns" berechnet. Leider hat Laven [1] in diesem Zusammenhang keine Quellen referenziert. Es wäre interessant gewesen, sowohl Modelle als auch Ergebnisse vergleichend den bisherigen Resultaten gegenüber zu stellen.

Axialsymmetrie Def: $\epsilon = \frac{b}{a} - 1; b \neq a$	
Körper als einfaches Ellipsoid [3]	Körper aus 2 ungleichen Halbellipsoiden [1]
$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b_1^2} = 1; y' \geq 0$ $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b_2^2} = 1; y' < 0$
	
	

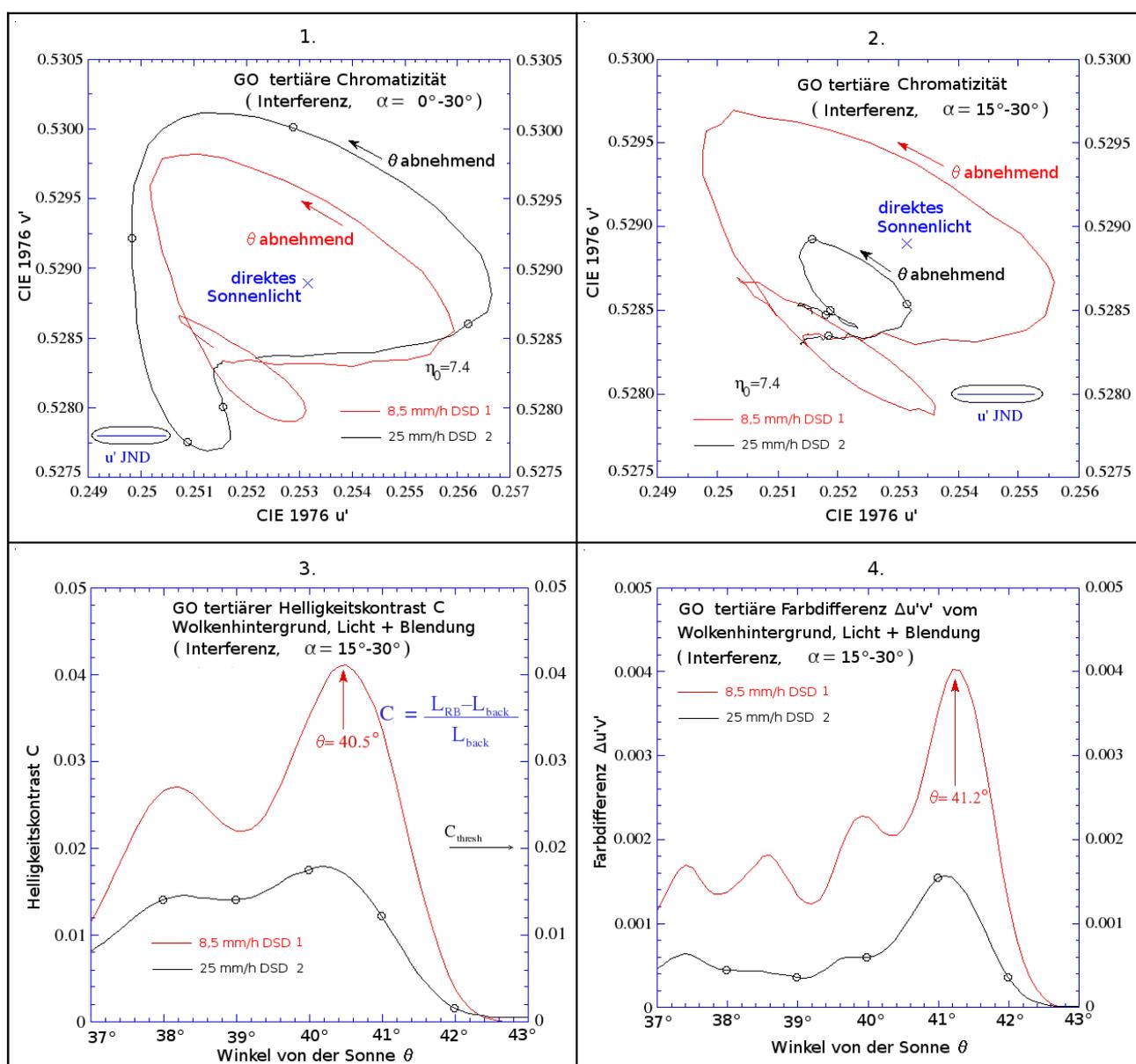
Tab. 5<sup>1)</sup>: Übersicht beider axialsymmetrischer Tropfenmodelle nach Laven [1], die als Grundlage für die Berechnung von Streumodellen dienen.

Laven [1] kommt am Ende seiner Ausführungen zu folgenden Schlussfolgerungen:

Dass der tertiäre Regenbogen durch die Streuung des Sonnenlichts an kugelförmigen Regentropfen verursacht wird ist unwahrscheinlich, denn die Transmission von Sonnenlicht durch kugelförmige Regentropfen für ( $p = 1$ ) ist stärker als die für Regenbögen ( $p = 3$ ) oder ( $p = 4$ ). Die Streuung an nicht-

kugelförmigen Regentropfen könnte dazu führen dass der tertiäre Regenbogen überhaupt erst sichtbar wird. Um die Sichtbarkeit des tertiären und quartären Regenbogens, durch "realistische" Tropfenformen verursacht, untersuchen zu können sind Computersimulationen mit einer Vollfarbauflösung erforderlich. Er schlägt weiterhin vor, wenn man schon nach einem tertiären Regenbogen Ausschau hält, dann sollte man auch gleich auf den quartären Regenbogen, auch Regenbogen vierter Ordnung genannt, achten.

Die Computersimulation mit Vollfarbauflösung wurde von Raymond Lee, Jr. [2] durchgeführt um die Sichtbarkeit des tertiären Regenbogens unter natürlichen Bedingungen quantitativ besser abschätzen zu können. Hierzu entwickelt er zunächst ein Tropfenauswahlverfahren (DSD = **D**rop-**S**ize-**D**istribution), das Tropfen gleicher Masse und einem Radius von  $(r_{EV} > 1 \text{ mm})^3$  beinhaltet. Weiterhin gehen noch drei Tropfenformen, ausgehend von kugelförmigen Tropfen und zwei weitere Typen aerodynamisch deformierter Regentropfen in die DSD ein. Dann entsteht ein dreidimensionales Modell der geometrischen Optik (GO) für die polydispersive Transmission von Licht durch den Tropfen bei einer Streuung in Kombination der Debye-Reihen von  $p = 1$  und  $p = 4$ . Dieses Modell wird auf eine breite Palette von Typen verschiedener Niederschlagsintensitäten angewandt.



Tab. 6<sup>1)</sup>: Farbverhalten des tertiären Regenbogens als Funktion von  $\theta$ , nach Lee [2]; GO – geometrische Optik (3D-Modell); (DSD – **D**rop-**S**ize-**D**istribution; 8,5 mm/h; 1. Typ der Niederschlagsintensität; 25 mm/h; 2. Typ der Niederschlagsintensität; **DSD 1** – Blanchard-DSD; DSD 2 – cb-DSD);  $\theta$  – Regenbogenwinkel (Ablenkwinkel);  $\alpha$  – Regenbogenwinkel im Uhrzeigersinn;  $C_{thresh}$  – physiologische Kontrastschwelle;  $L$  – Helligkeit im CIEL\* $u'v'$ -Farbraum.

Die komplette Modellrechnung wird im CIEL\* $u'v'$ -Farbraum [18] auf der Grundlage des CIE 1976-Normfarbsystems durchgeführt. Im ersten Schritt erfolgt zunächst die Bestimmung der Chromaticität (Projektion  $p: \{x, y\} \rightarrow \{u', v'\}$ ) als Funktion von  $\theta$ . Danach ist es möglich die chromatische Differenz  $\Delta u'v'$  und den Helligkeitskontrast ebenfalls als Funktion des Ablenkwinkels  $\theta$  von der Sonne zu berechnen (Tab. 6). Für die Berechnung der Werte für  $C$  und  $\Delta u'v'$ , entweder mit oder ohne Reflexion 3.-Ordnung, gelten folgende Bedingungen: a) Diffuse Reflexion des Lichtes vom sehr dunklen Wolkenhintergrund. b) Sonnenlicht wird in einem Regentropfen ohne innere Reflexion in Vorwärtsrichtung gebrochen (Blendung 0.-Ordnung).

Das einfache 3D-GO-Modell (Tab. 6, 1.) und (Tab. 6, 2.) reagiert ziemlich empfindlich auf die Änderungen der Sonnenhöhe  $h_0$ , der DSD und auch sehr sensibel auf die Änderung des Regenbogenwinkels im Uhrzeigersinn  $\alpha$ , weil mit wachsendem Betrag von  $r_{EV}$  auch die Abplattung der Tropfen zunimmt. Im Intervall  $\alpha = 15^\circ - 30^\circ$  liegt der Helligkeitskontrast für die 8,5 mm/h Blanchard-DSD oberhalb der physiologischen Kontrastschwelle des menschlichen Auges ( $C_{\text{thresh}} = 0.02$ ) (Tab. 6, 3.), aber wir sehen den tertiären Regenbogen mit geringerer Wahrscheinlichkeit im Helligkeitskontrast  $C$ , als vielmehr im Farbkontrast oder Farbdifferenz  $\Delta u'v'$  unter Berücksichtigung des dunklen Hintergrundes (Tab. 6, 4.). Die physikalisch-optischen Eigenschaften des 3D-GO-Modells sind in Tab. 7 zusammengefasst.



Tab. 7<sup>1)</sup>: Visualisierung der Simulation des 3. Regenbogens mit erhöhten Helligkeitswerten  $L_v$  für zwei DSD und Beschreibung der Eigenschaften des 3D-GO-Modells, nach Lee [2].

Lee [2] hat noch weitere Simulationen unter Voraussetzung verstärkter Helligkeitswerte  $L_v$  durchgeführt (Tab. 7). Diese Simulationen heben die unterschiedlichen Helligkeitsverteilungen in den Niederschlagsdistributen hervor, welche das 3D-GO-Modell bereits vorhergesagt. Die Blanchard-DSD ist

durch einen Mangel an großen Tropfen gekennzeichnet. Diese Distribution definiert eine mittlere Tropfengröße ( $r_{EV} \leq 0.65\text{mm}$ )<sup>3</sup> mit milchig-glasiger Opazität und ist mit der Niederschlagsintensität von 8,5 Millimeter pro Stunde korreliert. Tab. 7 zeigt deutlich, dass die Helligkeitsverteilung für  $L_v$  gleichmäßiger ist bei zunehmendem  $\alpha$  und die überzähligen Bögen sind offensichtlich erkennbar. Die zweite Simulation (Tab. 7) mit der Cb-DSD berücksichtigt großtropfigen Starkniederschlag mit einer Intensität von 25 mm/h, wie er aus einem sehr mächtigen Cb (Cumulonimbus) gewöhnlich fällt. Diese Visualisierung (Tab. 7) zeigt zwar eine breitere Helligkeitsverteilung am Fuß des Bogens,  $L_v$  nimmt aber mit wachsendem  $\alpha$  ziemlich schnell ab. Die überzähligen Bögen sind ebenfalls erkennbar, unterliegen aber dem gleichen Verhalten der Helligkeitsverteilung  $L_v$ .

Nach Auswertung mehrerer Simulationen kommt Lee [2] zu folgenden Ergebnissen: Die Streuung an Tropfen als natürliche Ursache des tertiären Regenbogens bringt von Natur aus einen schwachen Kontrast, sowohl in der Farbe als auch in der Helligkeit und im Vergleich mit diffus reflektiertem Licht am Wolkenhintergrund und bei vorwärts gestreutem Licht aller Ordnungen, mit sich. Unter idealen Umständen sollte Licht nach innerer Reflexion dritter Ordnung gerade so unter folgenden Bedingungen sichtbar sein: Es muss bei direkter Sonneneinstrahlung ein sehr dunkler Wolkenhintergrund vorhanden sein und Niederschlag in einer engen Bandbreite von kleinen bis mittelgroßen Tropfen ( $r_{EV} \leq 0,65\text{ mm}$ ) auftreten.

Zusammenfassend kann folgendes gesagt werden: Alle Referenten halten die Sichtbarkeit des tertiären Regenbogens in der freien Natur prinzipiell für möglich. Die Bedingungen unter denen er auftreten sollte, werden von ihnen allerdings unterschiedlich bewertet. Philip Laven [1] geht recht optimistisch an die Sache heran und empfiehlt bei der Gelegenheit auch gleich auf den Bogen vierter Ordnung zu achten, während bei Raymond Lee [2] ein pessimistischer Unterton in seinen Ausführungen nicht zu überhören war. Seine Betrachtungen über Helligkeit, Kontrast und Farbdifferenz liefern auch die größte Menge an Einschränkungen in der Sichtbarkeit des dritten Bogens. Wenn man bedenkt, dass im Zeitraum von 1758 bis 1986 nur vier anerkannte Beobachtungen (Tab. 1) überliefert sind, wird sofort klar, dass es sich hierbei um eine äußerst seltene Erscheinung handelt. Einschränkend kommt noch hinzu, dass der tertiäre Regenbogen in Sonnenrichtung entsteht und man neben dem schwachen Kontrast auch noch mit einer erheblichen Blendwirkung rechnen muss. Bei welchen Tropfenformen und Niederschlagsintensitäten dieser Regenbogen bevorzugt in Erscheinung tritt kann nicht einmal mit hinreichender Sicherheit gesagt werden. Die oben vorgestellten Modellbetrachtungen geben lediglich eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für deren Auftreten bei kleinen, mittelgroßen und nicht-kugelförmigen Regentropfen an.

Auf Grund der noch zu lösenden Probleme eröffnet sich hier ein Betätigungsfeld für Wetterbeobachter. Bisher existiert noch kein Foto vom tertiären Regenbogen. Lee [2] präsentierte am Ende seines Vortrages ein Foto, auf dem nur wenige glitzernde Punkte zu sehen sind. Man braucht hier schon viel Phantasie um darin überhaupt auch nur ansatzweise einen Teil dieses Regenbogens zu erkennen. Ein Foto mit einem eindeutig identifizierbaren tertiären Regenbogen wäre eine echte Sensation. Sollte ein solcher Bogen jemals wieder gesehen werden, dann ist es sinnvoll ebenso die Niederschlagsart, Niederschlagsintensität und die Tropfenform(en) zu bestimmen. Weitere Beobachtungen und ganz besonders Fotos sind hier sehr willkommen.

## 4 Kaustiken und Katastrophen durch Regentropfen

### 4.1 Einleitung

Im ersten Teil dieser Serie stellte sich im Zusammenhang mit dem Regenbogen dritter Ordnung heraus, dass es noch erheblichen Forschungsbedarf für die Entwicklung eines Tropfenmodells gibt. Wenn man elliptische Tropfenformen ins Kalkül zieht, so hat man das Problem aus einer unendlichen Menge von abgeplatteten und gestreckten Ellipsoiden die optimale Tropfengeometrie zu finden. Dieser Schritt ist zwingend bevor man die Tropfenzusammenstellung (DSD = Drop-Size-Distribution) für ein Niederschlagsmodell effektiv präzisieren kann. Im zweiten Teil geht es nun vorwiegend um Untersuchungen zur Geometrie und Optik von Wassertropfen, mit dem Ziel möglichst realistische Tropfenmodelle zu entwickeln.

### 4.2 Der Regenbogen als Beugungs-Katastrophe

Der Titel der Präsentation von Feng Xu und James Lock<sup>4)</sup> [19] wirkt im ersten Moment recht harmlos auf den Leser, nachdem wir uns im ersten Teil dieser Reihe mit den theoretischen Problemen des tertiären Regenbogens beschäftigt haben. Der Schwerpunkt liegt jedoch in der Bewertung von beobachteten optischen Kaustiken bei der Streuung von Licht an einem abgeplatteten Ellipsoid. Am Beispiel des Regenbogens erster Ordnung werden die Kaustiken nach Unstetigkeiten und sprunghaften Veränderungen untersucht. Die mathematische Grundlage für die Untersuchung von Unstetigkeiten und sprunghaften Veränderungen in Kaustiken dynamischer Systeme wird durch die Katastrophentheorie<sup>5)</sup> begründet. An dieser Stelle kommt somit eine weitere mathematische Disziplin zur Erforschung der Regenbögen hinzu. Die Betrachtung der Regenbögen vom Standpunkt der Katastrophentheorie aus, ist nicht besonders populär. Man findet daher in populärwissenschaftlichen Abhandlungen so gut wie nichts über derartige Beugungskatastrophen, was wohl darin begründet sein mag, dass für die meisten Erklärungen schon die Mie-Streuung ausreichend ist. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll hier eine Einführung in dieses Thema zu geben. Um den allgemeinen Überblick zu wahren sind zu Beginn in Tab. 8 die größeren Theorien zur Beschreibung der Regenbogen zusammengefasst und es ist kurz erwähnt, welche Phänomene sie erklären und welche nicht.

Theorie	Erklärt	Erklärt nicht
Geometrische Optik (Descartes, Newton, Huygens)	Form, Lage und Farben des Regenbogens.	Überzählige (Interferenz)Bögen
Lineare Wellentheorie (Young, Airy)	Überzählige (Interferenz) Bögen Tropfen von $r \geq 100 \mu\text{m}$ .	Polarisation vollständig und zu große Abweichungen bei Tropfen $r \leq 100 \mu\text{m}$
Streuung elektromagnetischer Wellen an einem Dielektrikum (Lorenz, Mie, Debye)	Exakte Streutheorie, erklärt den Regenbogen im Prinzip vollständig.	Störende Überlagerung der klassischen Airy-Wellen durch hochfrequente „Kräuselwellen“ (Streu-Photonen-Chaos).
Komplexe Drehmoment Theorie (CAM) (Nussenzweig)	Quantenmechanische Effekte bei Streuprozessen.	Sprunghafte Veränderungen in optischen Kaustiken.
Katastrophentheorie (Thom, Arnold, Zeeman)	Unstetigkeiten und sprunghafte Veränderungen in Kaustiken.	

Tab.8<sup>6)</sup>: – Zusammenfassung der größeren Theorien zur Erklärung des Regenbogens.

### 4.3 Einführung in die Katastrophentheorie

Zu Beginn starten wir ein Gedankenexperiment. Als Ausgangspunkt konstruieren wir uns ein 3-dimensionales Raumkontinuum, welches noch die Eigenschaften homogen und isotrop besitzt. Um ein wellenmechanisch dynamisches System zu bekommen, wird dieser Raum mit Licht durchflutet. Als Ergebnis erhalten wir einen gleichmäßig erhellten Raum, welcher aber auf Dauer recht langweilig auf den Beobachter wirkt, da in ihm nichts weiter passiert. Interessanter wird die Sache schon, wenn wir in diesem Raum einen oder auch mehrere Wassertropfen als Streukörper einbringen. Diese Tropfen wirken jetzt störend in der Fortpflanzung der Lichtwellen. Folglich kommt es nun zu Wechselwirkungen der Wellen mit den Wassertropfen, die wiederum irgendwelche Helligkeitsmuster erzeugen, je nach Komplexität der Wechselwirkungen. Diese Helligkeitsmuster werden in der geometrischen Optik als Kaustik bezeichnet. Sie treten durch die Intensitätsüberhöhung an den einhüllenden Strahlen eines breiten Strahlenbündels auf.

Schaut man sich nun die Ränder dieser Singularitäten genauer an, so wird man feststellen dass sie nicht scharf begrenzt sind, wie es die geometrische Optik vorgibt, sondern durch Beugungserscheinungen eher diffus oder fransenartig erscheinen. Diese Ränder lösen sich in Interferenzerscheinungen auf, so dass sich hier wieder die Wellennatur des Lichtes zeigt. Betrachten wir nun den Vorgang in unserem Gedankenexperiment als Prozess und ordnen jedem Kontrollparameter  $u$  einen Zustand  $x(u)$  zu. Ein regulärer Punkt des Prozesses ist ein Parameterwert  $u_0$  im Kontrollraum ( $u \in R_r$ ), in dessen Umgebung sich  $x(u)$  stetig ändert, wenn sich  $u$  ebenfalls stetig ändert. Ist das nicht der Fall, so ist  $u_0$  ein Katastrophenpunkt [20]. Unter der Voraussetzung dass der Keim endlich determiniert und die Kodimension  $r \leq 4$  ist, reduzieren sich die allgemeinen Katastrophenphänomene auf sieben Grundtypen [20] (siehe Tab. 9).

<b>Satz von Thom 1:</b> Es sei $f \in m^2(n)$ ein endlich-determinierter Keim. $(F, r)$ sei eine stabile Entfaltung von $f$ mit der Kodimension $r \leq 4$ , die ein lokales Minimum bei 0 besitzt. Dann hat $F$ entweder ein einfaches Minimum im Punkt 0 oder $F$ reduziert sich auf eine der 7 irreduziblen (kanonischen) Entfaltungen $G_k$ der Keime $g_k$ [20].				
Elementarkatastrophe	Keim $g_k$	Entfaltung $G_k$	Kodimension $r$	ADE-Klassifikation [21]
Falte (fold)	$x^3$	$x^3 + ux$	1	$A_2$
Spitze (cusp)	$x^4$	$x^4 - ux^2 + vx$	2	$A_3$
Schwalbenschwanz (Swallowtail)	$x^5$	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	3	$A_4$
Schmetterling (butterfly)	$x^6$	$x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$	4	$A_5$
Hyperbolischer Nabelpunkt (hyperbolic umbilic)	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	3	$D_4^+$
Elliptischer Nabelpunkt (elliptic umbilic)	$\frac{1}{3}x^3 - xy^2$	$\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vx$	3	$D_4^-$
Parabolischer Nabelpunkt (parabolic umbilic)	$x^2y + \frac{1}{4}y^4$	$x^2y + \frac{1}{4}y^4 + tx^2 + wy^2 - ux - vy$	4	$D_5$
<b>Satz von Thom 2:</b> Sei $C$ ein vierdimensionaler Parameterraum, sei $X$ ein beliebiger endlichdimensionaler Zustandsraum, und sei $V$ eine durch $C$ parametrisierte, glatte, generische Funktion auf $X$ . Dann ist $M$ eine glatte Hyperfläche in $X \times C$ , und die einzigen Typen von Singularitäten von $M$ sind die folgenden sieben elementaren Katastrophen [22].				
Elementarkatastrophe	$\dim X$	Normalform $V$	$\dim C$ reduzierbar auf	$\Phi(s; C)$ [24]
Falte (fold)	$\geq 1$	$\frac{1}{3}x^3 + ux$	1	$\frac{1}{3}s^3 + Cs$
Spitze (cusp)	$\geq 1$	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx$	2	$\frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{2}C_2s^2 + C_1s$
Schwalbenschwanz (Swallowtail)	$\geq 1$	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + wx$	3	$\frac{1}{5}s^5 + \frac{1}{3}C_3s^3 + \frac{1}{2}C_2s^2 + C_1s$
Schmetterling (butterfly)	$\geq 1$	$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}tx^4 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + wx$	4	$\frac{1}{6}s^6 + \frac{1}{4}C_4s^4 + \frac{1}{3}C_3s^3 + \frac{1}{2}C_2s^2 + C_1s$
Hyperbolischer Nabelpunkt (hyperbolic umbilic)	$\geq 2$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	3	$s_1^3 + s_2^3 - C_3s_1s_2 - C_2s_2 - C_1s_1$
Elliptischer Nabelpunkt (elliptic umbilic)	$\geq 2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	3	$s_1^3 - 3s_1s_2^2 - C_3(s_1^2 + s_2^2) - C_2s_2 - C_1s_1$
Parabolischer Nabelpunkt (parabolic umbilic)	$\geq 2$	$x^2y + y^4 + tx^2 + wy^2 - ux - vy$	4	$s_1^4 + s_1s_2^2 + C_4s_2^2 + C_3s_1^2 + C_2s_2 + C_1s_1$

Tab. 9: – Satz von Thom und Elementarkatastrophen in der Formulierung aus der Singularitätentheorie [20] und der Katastrophentheorie [22].  $t, u, v, w$  – Kontrollparameter;  $w, x, y, z$  – Zustandsparameter, ADE-Klassifikation nach Arnold [21] und Standardpolynome der optischen Katastrophe [24].

Der Katastrophenpunkt ist ein entarteter kritischer Punkt, bei dem alle ersten Ableitungen und einige höhere Ableitungen Null sind. Diese bilden den Keim der topologischen Potentialgeometrien und die Entartung wird durch Taylorreihenentwicklung entfaltet. Der Begriff „Entfaltung“ ist neben „stabil“ und „generisch“ der dritte grundlegende Begriff aus der Singularitäten- und Katastrophentheorie. In Tab. 9 sind nur die strukturell stabilen Elementarkatastrophen aufgeführt. Es sind also diejenigen, die nicht durch kleinere Störungen beseitigt werden können.

Arnold hat auf der Grundlage der Lie-Gruppen und der Lie-Algebra die heute gültige Klassifizierung der Katastrophenphänomene (ADE-Klassifikation) entwickelt, welche in der Literatur verbreitet zur Anwendung kommen [21]. Diese ADE-Klassen sind ebenfalls in Tab. 9 für die sieben Elementarkatastrophen mit verzeichnet. Anhand dieser Klassifizierung der Phänomene ist es nun möglich, Kaustiken auf derartige Topologischen Strukturen hin, gezielt zu untersuchen. Die Anwendung der Katastrophentheorie auf die Optik wird durch die Gültigkeit des Fermatschen Prinzips möglich. Es besagt sinngemäß, dass das Licht beim durchlaufen einer bestimmten Strecke von mehreren möglichen Wegen immer die kleinste optische Weglänge nimmt. Es geht also um die Minimierung der Lichtlaufzeit in Abhängigkeit vom gewählten Weg.

#### 4.4 Katastrophentheorie und Mie-Streuung

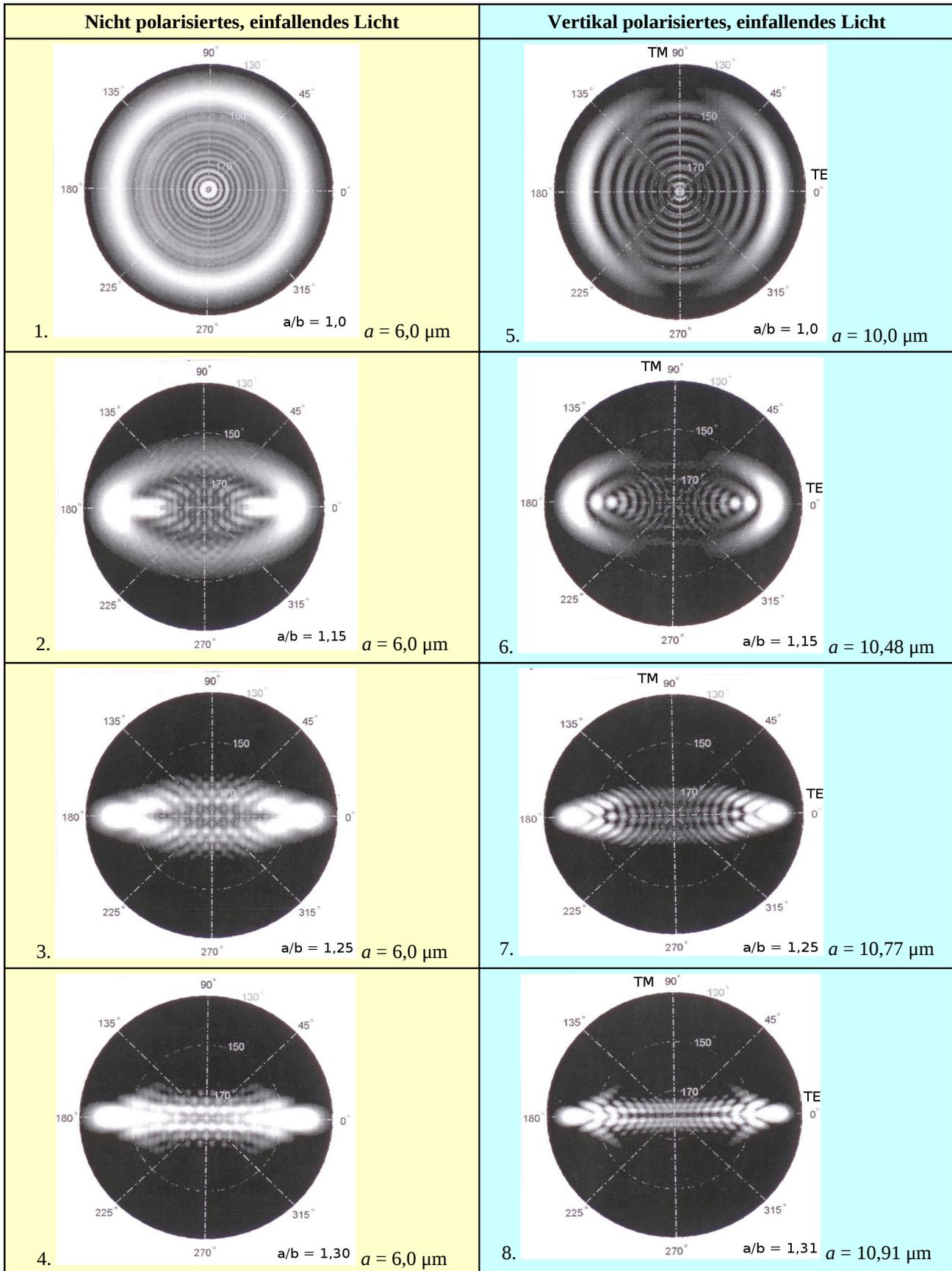
Beugungskatastrophen auf der Grundlage der Wellentheorie wurden unter anderem auch von M.V. Berry [24] – [27] untersucht. Da seine Publikationen jederzeit online einsehbar sind, soll an dieser Stelle aus Platzgründen nicht näher darauf eingegangen werden. Die Normalformen der optischen Beugungskatastrophen nach Berry [24], welche für die folgenden Betrachtungen wichtig sind, sind in Tab. 9 enthalten. Der nächste Schritt zur Entwicklung einer verallgemeinerten Theorie zur Entstehung des Regenbogens mit all seinen Begleiterscheinungen ist der Nachweis der optischen Beugungskatastrophe in den Kaustiken der Mie-Streuung. Feng Xu und James Lock [19] konnten in diesem Zusammenhang bereits auf Vorarbeiten von Marston und Trinh [28] zurückgreifen.

Für folgende Berechnungen kommen zwei verschiedene Verfahren zur Anwendung:

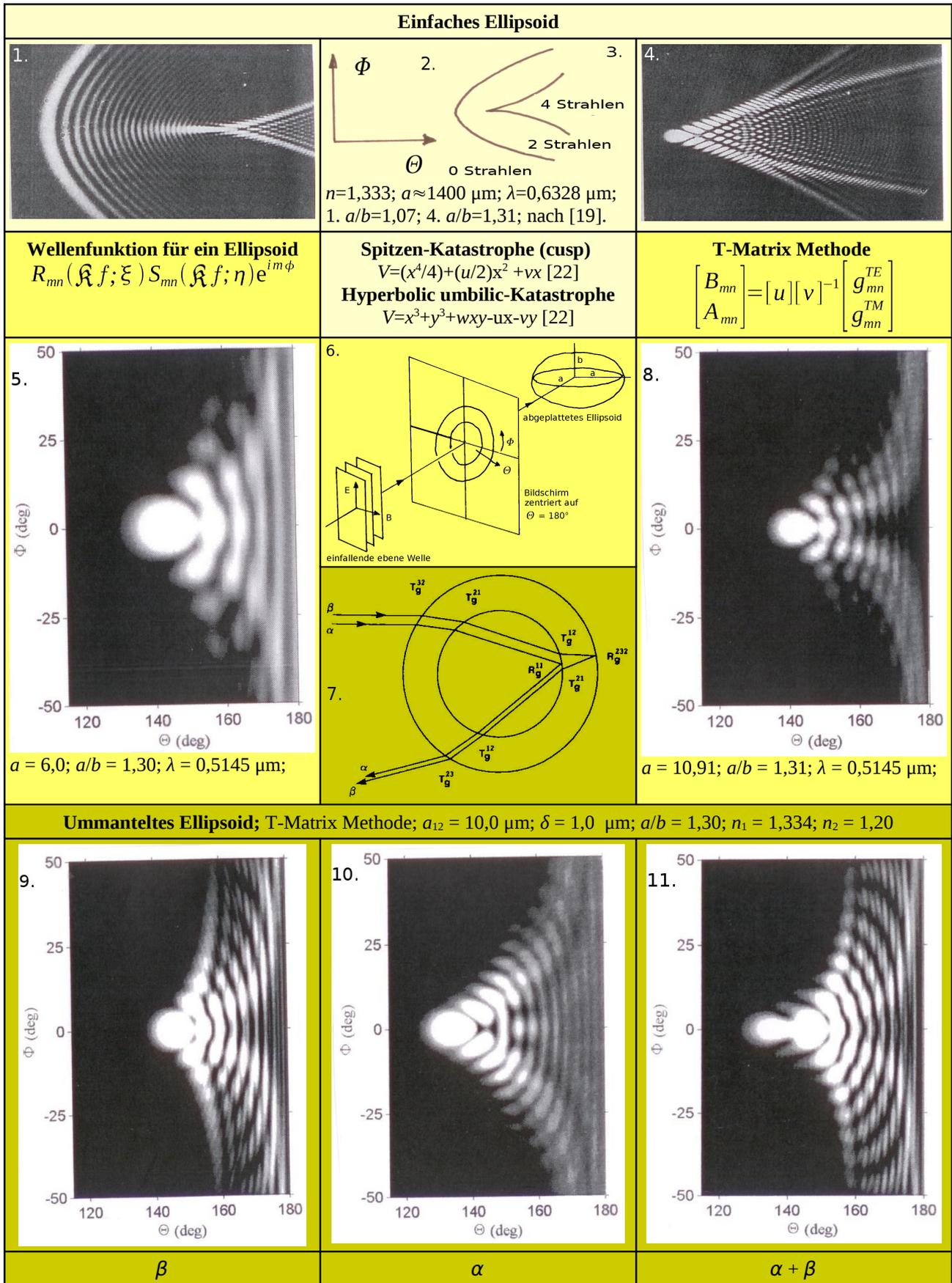
1. Nutzung der elliptischen Wellenfunktion für die Mie-Streuung ( $a \approx < 7 \mu\text{m}$ ).
2. Methode der erweiterten Grenzwertbedingungen (T-Matrix-Methode)<sup>7)</sup> ( $a \approx < 11 \mu\text{m}$ ).

In beiden Verfahren kommt die Partialwellenzerlegung der Debye-Serie zur Anwendung und nur die  $p = 2$  Komponente der Streuamplituden wird für weitere Auswertungen betrachtet. Da nach Tab. 8 die Mie-Streuung den Regenbogen im Prinzip vollständig erklärt, müssten theoretisch in der erweiterten Fassung für axialsymmetrische Tropfen bei identischem Versuchsaufbau die Kaustiken der reinen Wellentheorie und die Streukaustiken der Mie-Theorie vergleichbar sein, so dass hier ebenfalls die Elementarkatastrophen auftreten sollten.

Zum besseren Verständnis der nachfolgenden Versuche benutzen wir wieder unser oben eingeführtes Gedankenexperiment. In diesem Raum positionieren wir ein abgeplattetes Ellipsoid, als transparentes Streumedium, dessen Geometrie stufenweise verändert werden kann. Es soll in diesem Zusammenhang der Begriff „abgeplattetes Ellipsoid“ Verwendung finden, weil die Geometrie des Ellipsoids in diesem Verfahren durch das Verhältnis der beiden Halbachsen  $a/b$  frei definierbar ist, wobei immer die Relation ( $a > b$ ) erhalten bleiben muss. Da die Kugelsymmetrie als Spezialfall ( $a/b = 1,0$  und  $b = a$ ) und als Startbedingung im Gedankenexperiment auftritt, ist eine Trennung zwischen Kugelsymmetrie und Axialsymmetrie, wie in Kap. 3.3.2, Tab. 3 und in Tab. 3 des ersten Teils dieses Konferenzberichtes [23] noch dargestellt, in diesem Fall nicht mehr sinnvoll. Zwischen der Lichtquelle und dem Streumedium wird ein Bildschirm zentriert auf  $\theta = 180^\circ$  mit einer Lochblende installiert, auf dem die Streukaustiken dann abgebildet werden. Die Position des Bildschirms zwischen Lichtquelle ( $\theta = 0^\circ$ ) und Streumedium ergibt sich zwingend aus  $\theta = 137,69^\circ$  für ( $p = 2$ ) und die Lochblende sorgt einerseits dafür, dass das Licht ungehindert auf das Streumedium trifft und andererseits dass weitestgehend parallelisiertes Licht am Ellipsoid gestreut wird. So vermeidet man störende Mehrfachbilder durch überlappende Streukaustiken. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, dass der Begriff Kaustik nicht auf die geometrische Optik beschränkt ist, sondern er kann prinzipiell auf alle dynamischen Systeme angewendet werden. Eine allgemeine Definition des Begriffes Kaustik findet man bei Tribel [20]. In Anlehnung an diese Definition werden hier nur die, durch die Streuung entstehenden Helligkeitsmuster, als Streukaustiken<sup>9)</sup> bezeichnet. Das mit unserem Gedankenexperiment in Verbindung gebrachte, und von Feng Xu und James Lock [19] verwendete Laborexperiment, ist schematisch in Tab. 11, 6. abgebildet.



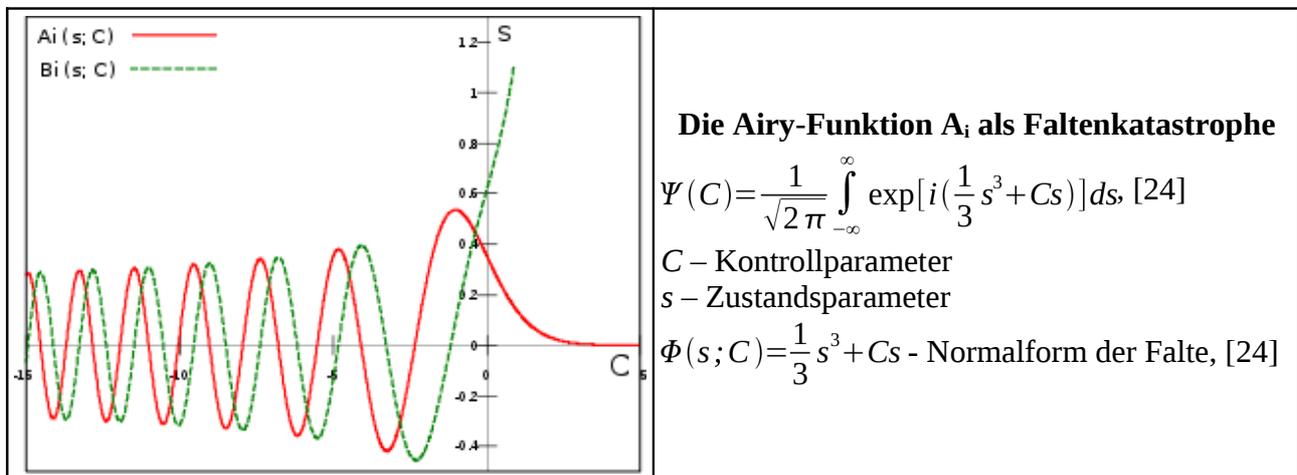
Tab. 10<sup>9)</sup>: – Abbildungen der Streuakaustiken für unterschiedliche Halbachsenverhältnisse  $a/b$ , nach Feng Xu & Janes Lock [19];  $n = 1,334$ ;  $\lambda = 0,5145 \mu\text{m}$ ; TM – Polarisationsrichtung transversal magnetisch; TE – Polarisationsrichtung transversal elektrisch.



Tab. 11<sup>9)</sup>. – Faltungs-, Spitzen- und Hyperbolic umbilic- Katastrophen an Streukaustiken für  $p = 2$  nach Feng Xu & Lock [19]; Normalformen ( $V$ ) der Spitzen- und Hyperbolic umbilic- Katastrophe nach der Katastrophentheorie von Thom durch parametrisierte, glatte und generische Funktion auf einen beliebigen Zustandsraum [22].

Jetzt können wir das Gedankenexperiment in der eben besprochenen Versuchsanordnung, in zwei Serien starten. In der ersten Serie wird eine nicht polarisierte ebene Welle an dem Medium gestreut und die  $p = 2$  Komponente der Amplituden wird auf dem Schirm abgebildet. In mehreren Stufen erfolgt dann die Reduzierung der kleinen Halbachse ( $b$ ) während die große Halbachse konstant bleibt. Die Mie-Streuung kann man in dieser Serie noch direkt mit Hilfe der elliptischen Wellenfunktion berechnen. In der zweiten Serie kommt es zur Streuung einer vertikal polarisierten Welle an ein abgeplattetes Ellipsoid und diese Amplituden werden ebenfalls dargestellt. In diesem Fall erfolgt die stufenweise Dehnung der großen Halbachse ( $a$ ) und die kleine Halbachse ( $b$ ) bleibt konstant. Feng Xu und James Lock [19] wählten hier zur Berechnung des Streuverhaltens die T-Matrix-Methode, damit bei derart vergrößerten Ellipsoiden die Rechenzeit in einem akzeptablen Rahmen bleibt. In beiden Serien bleibt die Relation ( $a > b$ ) erhalten, so dass mit der Veränderung von  $a/b$  eine Zunahme der Abplattung verbunden ist. Eine Auswahl der in beiden Serien entstandenen Bilder sind als Streukaustiken in Tab. 10 geordnet aufgeführt. Besondere und interessante Fälle dieser Art sind zum Vergleich sind in Tab. 11 zusammengestellt. Diese Streukaustiken schauen wir uns nun genauer an.

Die Abbildungen Tab. 10, 1. und Tab. 10, 5. zeigen die Streukaustiken der Kugelsymmetrie für den Start beider Serien. Es ist ein Muster erkennbar, welches man ohnehin erwarten würde, nämlich den hellen Ring als Regenbogen und die vielen Beugungsringe als überzählige Bögen. Von der Katastrophentheorie aus betrachtet handelt es sich bei dieser Streukaustik um eine Faltenkatastrophe, auch wenn es erstmal nicht danach aussieht. Die Falte ist mit der Kodimension 1 die einfachste und unscheinbarste Elementarkatastrophe (Tab. 9), da sie von nur einem Parameter abhängt. Die Falte ist ein Punkt auf einer Linie oder eine Kurve auf einer Fläche oder eine Fläche in einem Raum. Diese wollen wir uns im Zusammenhang mit den Abbildungen Tab. 10, 1. und Tab. 10, 5. etwas genauer ansehen. Wie man vom Standpunkt der geometrischen Optik die Zustands- und Kontrollparameter definiert und die Falte grafisch darstellen kann, ist auf Seite 272 bei Berry [24] am Beispiel des einfachen Regenbogens sehr gut erläutert. Interessant ist nun die Frage: Wie lassen sich die überzähligen Bögen mit der Faltenkatastrophe erklären? Es ist ja bekannt, dass der Regenbogen mit seinen überzähligen Bögen durch die Airy-Funktion  $A_i$  beschrieben wird. Dazu schauen wir uns den Graph von  $A_i$  an (Tab. 12).



Tab. 12: – Graph der Airy-Funktionen  $A_i$  und  $B_i$  [30] und Gleichung für  $A_i$  in Parameterdarstellung nach Berry, Seite 284-285, [24].

Der Graph von  $A_i$  zeigt auf den ersten Blick einen unterschiedlichen Verlauf der Funktion. Im Intervall  $C > 0$  strebt  $\Psi(C)$  gegen Null. Im Fall  $C = 0$  ist der Anstieg von  $\Psi(C)$  gleich eins und im Intervall  $C < 0$  wird der Anstieg immer flacher, bis er schließlich negativ wird. Für  $C < 0$  existieren für den Integranden zwei stationäre Punkte (in der geometrischen Optik zwei Strahlen) als Wendepunkte, zwischen denen diese Funktion in diesem Intervall oszilliert. Die überzähligen Bögen sind also ein Teil der Faltenkatastrophe und stellen in der physikalischen Interpretation die Interferenzbögen dar. Man erkennt auch, daß in der Parameterfassung der Funktion  $A_i$  nach Berry [24] die Normalform als Term im Integranden bereits enthalten ist.

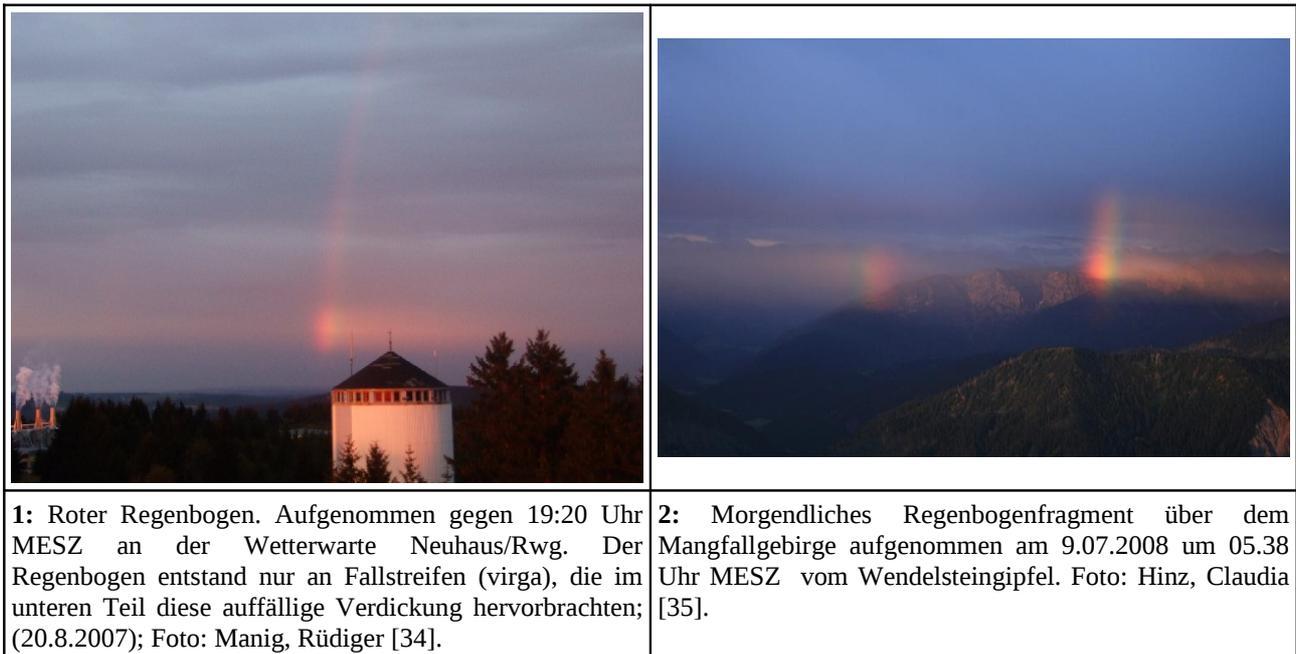
Bei einer stufenweise zunehmenden Abplattung des Streukörpers und Beibehaltung der Kodimension kommt es zunächst einmal zur Deformation der Falte im Vergleich zur Normalform. Die Streukaustik erscheint dann

auch abgeplattet. Bei einem Verhältnis der Halbachsen von  $a/b = 1,15$  (Tab. 10, 2.) und (Tab. 10, 6.) bilden sich in der Äquatorebene der Streukaustiken weitere Helligkeitsmuster heraus. Da mit  $a/b = 1,15$  bereits eine deutliche Abplattung verbunden ist, ergibt sich die Notwendigkeit die Kodimension auf zwei zu erhöhen und einen weiteren Kontrollparameter hinzuzufügen. Denn die Kugelsymmetrie ist in die Axialsymmetrie übergegangen, so dass auf Grund von zwei unterschiedlichen Halbachsen auch zwei Kontrollparameter erforderlich sind. Nach Tab. 9 ist die Spitzenkatastrophe die nächst auftretende Elementarkatastrophe mit zwei Kontrollparametern. Die Spitze bildet sich am Berührungspunkt zweier aufeinander zulaufenden Falten heraus (Tab. 11, 3.). Eine bessere Abbildung mit leichten räumlichen Eindruck der Spitze findet man bei Berry [26]. Die Gesamtdarstellungen der Streukaustiken (Tab. 10, 2.) und (Tab. 10, 6.) lassen nicht sofort erkennen, dass es sich hierbei um Spitzen handelt. In Tab. 11, 1. befindet sich daher ein detailreicher Ausschnitt einer Streukaustik von Marston und Trinh [28]<sup>4)</sup>. Auf der linken Seite ist die deformierte Falte mit Interferenzstreifen gut zu erkennen, während sich etwa in der Mitte des Bildes eine gut ausgeprägte Spitze mit den aufeinander zulaufenden Falten herausgebildet hat. Auch bei diesen Falten sind die Interferenzstreifen zu erkennen. Bei Marston und Trinh [28]<sup>4)</sup> beginnt die Spitze bereits bei einem Verhältnis der Halbachsen von  $a/b = 1,07$ . Allerdings ist  $a$  mit ca.  $1400 \mu\text{m}$  ziemlich groß im Vergleich zu den in Tab. 10 angegebenen großen Halbachsen, so dass sich die Spitze in diesem Fall deutlich herausbilden kann. Die Abbildungen Tab. 11, 2. und Tab. 11, 6. zeigen aber auch, dass die Ausbildung der Spitze auf Kosten des Lichtmusters geht, welches wir als den Regenbogen sehen würden. Der Scheitel ist nur noch sehr schwach ausgeprägt. Im Fall des vertikal polarisierten Lichtes (Tab. 11, 6.) ist er sogar völlig verschwunden. Die Helligkeit ist hier vielmehr um die Fußpunkte bei  $\Phi = 0^\circ$  und  $\Phi = 180^\circ$ , sowie in Horizontnähe verteilt. Wird die Exzentrizität  $a/b$  weiter vergrößert, so kommt es zur Bildung einer weiteren Elementarkatastrophe, des hyperbolischen Nabelpunktes (hyperbolic umbilic) (Tab. 10, 3. und Tab. 10, 7., sowie Tab. 10, 4. und Tab. 10, 8.). Diese Helligkeitsmuster sind im vertikal polarisierten Licht noch besser zu erkennen als im nicht polarisierten Licht. Die bei einem Verhältnis der Halbachsen von  $a/b = 1,15$  vorhanden linken und rechten Bogensegmente ziehen sich weiter zusammen und bilden dann die hyperbolischen Nabelpunkte. Der hyperbolic umbilic hat die Kodimension 3 und der Keim besteht aus einer Summe zweier Zustandsparameter (Tab. 9). Bei  $a/b = 1,25$  bildet sich im Scheitel ein schmaler konvexer Lichtstreifen heraus, welcher bei  $a/b = 1,30$  leicht konkav erscheint. Auch bei Marston und Trinh [28]<sup>4)</sup> (Tab. 11, 4.) ist bei  $a/b = 1,31$  der hyperbolische Nabelpunkt gut zu erkennen, und die Spitze ist nicht mehr vorhanden (vergleiche Tab. 11, 1. mit Tab. 11, 4.). Die Abbildung Tab. 11, 5. ist eine Ausschnittvergrößerung von Tab. 10, 4. und Tab. 11, 8. ist die Vergrößerung von Tab. 10, 8., (von Feng Xu und James Lock [19]) welche beide den Nabelpunkt sehr gut zeigen. Nach neueren Untersuchungen von James Lock und Feng Xu [32] führt die Vergrößerung der Exzentrizität zu einem Zusammenwachsen der Strahlen in den Streumedien und sie verlassen die Tröpfchen in gleicher Richtung oberhalb und unterhalb ihrer Äquatorebenen. So kommt es zur Ausbildung der Spitze und weiterer Elementarkatastrophen mit höheren Kodimensionen. Feng Xu und James Lock [19] zeigten in ihrer Präsentation noch Streukaustiken von einem weiteren Tropfenmodell, welches in diesem Zusammenhang noch nicht besprochen wurde, ein ummanteltes abgeplattetes Ellipsoid. Es ist schematisch mit den unterschiedlichen Strahlengängen in Tab. 11, 7. abgebildet. Die Ummantelung ist durch zwei Teilräume mit unterschiedlichen Brechungsindizes gekennzeichnet, so dass sich auch zwangsläufig unterschiedliche Strahlenwege ergeben. Die Streukaustiken zeigen für  $a/b = 1,30$  (Tab. 11, 9.; Tab. 11, 10. und Tab. 11, 11.) kein qualitatives anderes Bild. In allen Fällen ist der hyperbolische Nabelpunkt gut zu erkennen. In Tab. 11, 11. ist ein veränderter hyperbolischer Nabelpunkt abgebildet, der durch die Überlagerung der Strahlenwege  $\alpha$  und  $\beta$  entstanden ist.

#### 4.5 Zusammenfassung und Diskussion

Die Präsentation von Feng Xu und James Lock [19] hat in eindrucksvoller Weise gezeigt, dass durch die Mie-Streuung die gleichen Elementarkatastrophen entstehen wie durch rein wellenmechanische Betrachtungen. Damit ist ein wichtiger Schritt zur Schaffung einer verallgemeinerten Theorie des Regenbogens vollzogen. Weiterführende Arbeiten zu diesem Thema sind inzwischen von Feng Xu; James Lock und Cameron Tropea [31] sowie James Lock und Feng Xu [32] publiziert. Die Streutheorie liefert zwar ebenfalls Kaustiken, die Bedeutung, Klassifizierung und physikalische Interpretation der speziellen Lichtmuster, die im Zusammenhang mit bestimmten Tropfenformen entstehen, ist nur in Verbindung mit der Katastrophentheorie möglich. Es ist schon etwas länger bekannt, dass man auf der Grundlage von Interferenzbögen auf die Tropfengröße schließen kann (siehe M. Minnaert [33]). Mit diesem Verfahren ist es nun möglich neben der Größe auch Rückschlüsse auf die Geometrie und Form der Regentropfen zu ziehen.

Letztendlich hinterlässt jeder Tropfen seinen Fingerabdruck durch ein definiertes Lichtmuster. Wie ist es nun möglich die Theorie mittels gezielter Beobachtung von Regenbögen zu begleiten? Wenn die oben beschriebenen Katastrophen im Labor und durch Simulationen erzeugt werden können, dann treten sie prinzipiell auch in der Natur auf. Wir dürfen allerdings nicht davon ausgehen, dass sie so deutlich zu sehen sind wie auf den Abbildungen in Tab. 10 und Tab. 11. In der freien Natur ist das Licht kaum parallelisiert. Weiterhin tritt hier hauptsächlich die Mehrfachstreuung auf. Äußere Reflexionen stören das gesamte Erscheinungsbild, der horizontale Temperaturgradient zwischen Niederschlag und Umgebung (bei Schauer-Wetterlagen) ist nicht zu vernachlässigen. Die Zusammensetzung des Niederschlages in Geometrie und Größe der Tropfen ist nicht einheitlich. Es sind also viele Faktoren die die Sichtbarkeit des Regenbogens im allgemeinen und ganz besonders dieser speziellen Helligkeitsmuster beeinträchtigen. In den meisten Fällen dürften diese Katastrophen sogar durch andere Effekte überlagert sein.



Tab. 13: – Fotos von Regenbögen mit besonderen Kaustiken, wie sie in der Natur bei vorwiegend elliptischen Tropfenformen von  $a/b \approx 1,15$ , mit einheitlicher Geometrie auftreten könnten.

Tab. 13 enthält zwei Fotos, die ähnliche Lichtmuster zeigen wie die in Tab. 10, 2., eine hellere Fläche am Fuße des Regenbogens und ein leuchtender horizontaler Streifen. Es ist ohne Simulation sehr gewagt diese Fotos mit den oben besprochenen Prozessen in Verbindung zu bringen, weil die entscheidende Information, z.B. über die Bewölkung, Art und Intensität des Niederschlags fehlt. Dennoch sie sind ein gutes Beispiel zur Demonstration von Sonderformen an Regenbögen wie sie im Niederschlag mit mehrheitlich elliptischen Tropfenformen bei einem Verhältnis der Halbachsen von ca. 1,15 und bei tief stehender Sonne zu erwarten sind. Die interessantesten Erscheinungen in und an Regenbögen treten Tab. 10 zur Folge hauptsächlich in der Nähe des Horizontes auf, so dass Beobachter von Bergstationen sich in einer hervorragenden Position befinden, da sie in der Regel freie Sicht zum Horizont und noch darunter haben. Im Flachland hingegen ist der Horizont oft durch Sichthindernisse blockiert. Trotz aller Schwierigkeiten und Einschränkungen lohnt es sich in Regenbögen nach merkwürdigen Lichtstreifen, Verdickungen, hellen Lichtflecken, hyperbolischen Bögen usw. Ausschau zu halten. Am besten sind auswertbare Fotos mit Angaben zur verwendeten Optik. Bei auffälligen und hellen Erscheinungen ist es angebracht, in das entsprechende Objekt hinein zu zoomen. So sind möglicherweise noch feinere Details zu erkennen.

#### 4.6 Äußere Reflexionen und regenbogenartige Kaustiken an Wassertropfen

Es hat sich gezeigt, dass Kaustiken hervorragend geeignet sind um Form und Geometrie von Regentropfen zu untersuchen und die entsprechenden Parameter zur Vorbereitung von Modellrechnungen und Simulationen zu definieren. Die Präsentation von Charles Adler; James Lock und Richard Fleet [36] beschäftigt sich mit Kaustiken, die durch äußere Reflexionen entstehen. Zu Beginn des Vortrages wurden jeweils zwei Fotos präsentiert, die unterschiedliche Tröpfchen mit unterschiedlichen Blendflecken zeigen.

Beide Tröpfchen hängen am Grashalm (Tab. 14). Es gelten hier folgende Ausgangsbedingungen:

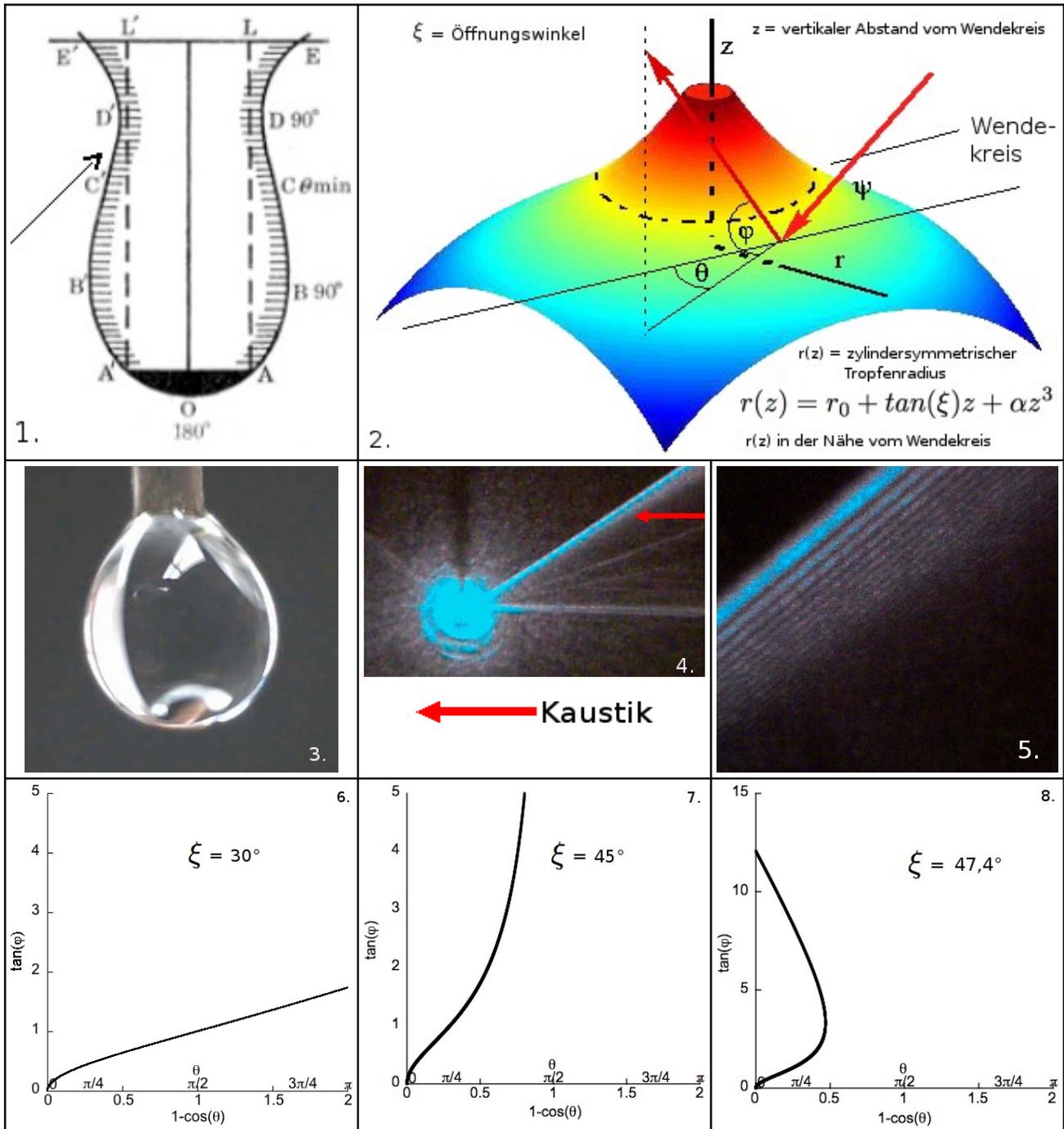
1. Die Sonne befindet sich vorne und oben rechts bei einem Höhenwinkel von  $48^\circ$ .
2. Diese Blendflecken entstehen durch Reflexion, nicht durch Brechung.
3. Laut Fleet, zeigen etwa 1 von 100 Tröpfchen derartige Blendflecken.

Die extrafokale Aufnahme (Tab. 14, 2.) des Blendfleckes von (Tab. 14, 1.) zeigt die Airy Streifen klar, aber sie sind nicht stark gefärbt. Dies ist ein deutliches Zeichen dafür, dass der Blendfleck nicht durch Brechung entstanden ist. Im zweiten Fall (Tab. 14, 3.) und (Tab. 14, 4.) sind in der ebenfalls extrafokalen Aufnahme keine Airy Streifen sichtbar. Wie ist dieser Unterschied zu erklären? Dazu schauen wir uns die Fotos mit den Tröpfchen genauer an. Im ersten Bild (Tab. 14, 1.) befindet sich der Blendfleck an der Stelle, an der Tropfen am Blatt befestigt ist und das Bild (Tab. 14, 2.) zeigt die das bekannte Airy Muster. Im zweiten Bild (Tab. 14, 3.) befindet sich der Blendfleck etwa in der Mitte des Tropfens und es sind keine Streifen zu erkennen.



Tab. 14<sup>8)</sup>: – Reflexionen an Wassertröpfchen, Fotos wurden freundlicherweise von Richard Fleet für die Präsentation zur Verfügung gestellt. [36]

Anhängende Tropfen sind in unmittelbarer Umgebung des Berührungspunktes deformiert. Die Geometrie von anhängenden Tropfen wurde von Paddy [37] erforscht und ein geometrisch parametrisierter Tropfen ist in Tab. 15, 1. dargestellt. Paddy fand heraus, dass in der Nähe des kreisförmigen Anhängpunktes eine Wendepunkt existiert, an dem die Krümmung von konkav nach konvex übergeht. An diesem Wendepunkt ist der Anstieg eins und bildet einen Kreis um den Tropfen, der in folgenden Ausführungen als Wendekreis bezeichnet wird. In Tab. 15, 1. ist dieser Wendepunkt mit einem Pfeil gekennzeichnet. Geometrische Form und Strahlengang in der Nähe des Wendekreises sind in Tab. 15, 2. dargestellt. In der Umgebung des Wendekreises variiert der Öffnungswinkel in Abhängigkeit von der Krümmung der Oberfläche. Die Form der Kaustik wird also entscheidend vom Öffnungswinkel  $\xi$  beeinflusst. Der Streuwinkel reflektierten Lichtes geht in der Nähe des Wendekreises durch ein Profil Maximum (wie beim Regenbogen), was im Endeffekt eine Kaustik in Form einer Falte verursacht, womit wir wieder bei der Katastrophentheorie angekommen sind.



Tab. 15<sup>9)</sup>: – Geometrie und Kaustik anhängender, deformierter Tropfen; Bild 1 [37]; Bilder 2,6,7,8 für Sonnenhöhe von 0° [36].

Die Fernfeldform der Kaustik wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. Die Regenbogen-Kaustik von einem Wassertropfen ist in der Form eines Kegels durch die hohe Symmetrie des Tropfens gekennzeichnet.
2. Die Reflexions-Kaustik vom anhängenden Tropfen hat eine kompliziertere Form aufgrund seiner geringeren Symmetrie.
3. Die Details in der Form der Kaustik werden vom Öffnungswinkel  $\xi$  bestimmt.

Die Form der Kaustik wird durch den Polarwinkel ( $\varphi$ ) und den Azimutwinkel ( $\theta$ ) des Regenbogenstrahls als Funktion der kritischen Kurve auf der Oberfläche des Tropfens bestimmt. Beide Winkel können parametrisch bestimmt werden. Die Grafiken (Tab. 15, 6. bis Tab. 15, 8.) zeigen die Form der Regenbogenskaustik für verschiedene Werte von Öffnungswinkel (bei einer Sonnenhöhe von  $h = 0^\circ$ ). Nach

Abbildung Tab. 15, **8.** kommt es bei einem Öffnungswinkel von  $47,4^\circ$  zur Bildung der Faltenkatastrophe. Die Autoren dieser Präsentation versuchten die vorangegangenen theoretischen Betrachtungen durch ein Laborexperiment zu stützen. Der Aufbau des Experimentes sollte möglichst die realen Bedingungen wiedergeben, unter denen das Foto (Tab. 14, **1.**) entstanden ist. Der anhängende Tropfen wurde durch eine Spritze mit eben gefeilter Kanülenöffnung abgesetzt. Dann leiteten sie einen Laserstrahl in die Nähe des Berührungspunktes des abgesetzten Tröpfchens und untersuchten das gestreute Lichtmuster auf einem Bildschirm (siehe Tab. 15, **3.** bis Tab. 15, **5.**). Das Experiment wurde mit drei Tropfengrößen (klein, mittelgroß und groß) durchgeführt und folgende Effekte der Tropfengröße festgestellt. Aufgrund der wirkenden Schwerkraft haben große Tröpfchen kleinere Öffnungswinkel als kleine Tröpfchen, sodass sich Notwendigkeit ergab, den Öffnungswinkel  $\xi$  (also die Form der Kaustik) beim Übergang zu anderen Tropfengrößen zu kontrollieren. Das Experiment bestätigte ebenfalls das Auftreten der Faltenkatastrophe (Tab. 15, **5.**) an der Kaustik (Tab. 15, **4.**).

Zwischen der theoretischen Betrachtung und den Umständen unter denen die Fotos (Tab. 14) entstanden gab es dennoch Unterschiede in den Ausgangsbedingungen. Der Blendfleck auf dem Foto (Tab. 14, **1.**) ist bei einem hohen Sonnenstand dokumentiert, sodass der polare Streuwinkel ( $\varphi$ ) sich in der Nähe von  $90^\circ$  befindet. In der Theorie (Tab. 15) wurde eine Sonenhöhe von  $h = 0^\circ$  vorausgesetzt. Der Blendfleck ist aber erst bei einem Öffnungswinkel von etwa  $63^\circ$  plausibel. Die Arbeit von Padday [37] zeigt, dass dies bei einem Tropfenradius von etwa 1,2 mm der Fall ist. Die Tröpfchen auf den Fotos von Richard Fleet (Tab. 14) liegen im Bereich von 1-2 mm Radius.

In dieser Präsentation wurde gezeigt, dass bei einer physischen Deformation von Wassertropfen, hervorgerufen durch äußere Wechselwirkungen, es zu Unstetigkeit und sprunghaften Veränderungen an Kaustiken kommt. Diese Katastrophen treten sogar schon bei der wohl einfachsten Form der Streuung des Lichtes auf, nämlich der äußeren Reflexion. Die Dispersion dieser Airy-Streifen ist derart schwach, dass die Farben blass erscheinen im Vergleich zu den Farben der Brechung. Für die Beobachtung spielt dieser eine Fall isoliert betrachtet kaum eine Rolle, da einerseits die schwachen Farben der Falte in einer Reflexion mit einiger Wahrscheinlichkeit nicht wahrgenommen werden und andererseits tritt diese Falte auch nur am ganz bestimmten Ort eines deformierten Tropfens auf. In der Gesamtheit betrachtet sollte man schon davon ausgehen, dass die Deformation von Regentropfen gar nicht so selten ist. Turbulenzen und starke Scherwinde in Schauern und Gewittern lassen die Tropfen oszillieren und auch platzen. Auch die Koaleszenz von Tropfen führt ebenfalls zur Deformation. In der freien Natur zeigen sich diese Effekte dadurch, dass sie den gewöhnlichen Regenbogen durch Überlagerung beeinflussen. Es kann in Teilen des Regenbogens zu Verwaschungen oder gar Auslöschungen der Farben kommen, was für die Beobachtung wieder interessant sein dürfte.

## 5 Sonderformen durch inhomogene Regentropfen

### 5.1 Einleitung

Nachdem im Teil 2 dieser Reihe gezeigt wurde, dass bereits elliptische Tropfenformen eine Vielzahl charakteristischer Kaustiken hervorbringen, sind damit die vielfältigen Möglichkeiten zur Bildung von Sonderformen in ihrer Gesamtheit noch nicht erschöpft. In beiden Teilen dieser Serie basierten die theoretischen Betrachtungen auf der Grundlage von homogenen Tropfen. Dadurch konnte der Brechungsindex als eine Konstante betrachtet werden, was die Theorie etwas „vereinfachte“. Im Teil 2 dieser Reihe kam nur ganz kurz ein ummantelter Regentropfen mit zwei unterschiedlichen Brechungsindizes in die Auswertung der Kaustiken hinzu. Im dritten und letzten Teil dieser Reihe wollen wir uns mit den optischen Erscheinungen beschäftigen, die durch inhomogene Tropfen theoretisch möglich sind. John Adam [38] präsentierte die Gradientenoptik recht ausführlich auf der Konferenz und ergänzte die Palette der theoretisch möglichen Erscheinungsformen von Regenbögen somit noch um eine weitere Gruppe.

### 5.2 Eine kurze Einführung in die Gradientenoptik

Unter der Bezeichnung Gradientenoptik werden alle optischen Prozesse zusammengefasst, die auf einer radialen Änderung des Brechungsindex (Gradientenindex) im Medium basieren. Die Gradientenoptik ist eher von technischem Interesse, da auf diese Weise Linsen ohne Krümmung hergestellt werden können. Somit ist auch eine Miniaturisierung komplexer optischer Systeme ohne Probleme möglich. Derartige Gradientlinsen befinden sich in fast allen optoelektrischen Geräten (Scanner, Kopierer usw.)

In der freien Natur verursacht der Gradientenindex (GRIN) im Allgemeinen die atmosphärische Lichtbrechung und im Speziellen ist er auch für die Luftspiegelung verantwortlich. In Flüssigkeiten entsteht der Gradientenindex auf natürliche Weise durch Temperaturunterschiede, sowie durch Konzentrationsunterschiede in wässrigen Lösungen.

Auf thermischer Basis kann ein radialer Gradientenindex entstehen, wenn ein Tröpfchen beim Durchlauf durch eine Brennkammer gleichzeitig erwärmt und verdampft wird. Hierbei kommt es noch darauf an, dass die Konvektion im Tröpfchen vernachlässigbar im Vergleich mit der Wärmeleitung ist (Adam und Laven [39]). Auf dieser oder ähnlicher Basis entwickelte Verfahren, werden als Regenbogen-Refraktometrie und Thermometrie bezeichnet und sind eher in technisch-analytischen Bereichen wie z. B. die Pharmazie anzutreffen.

Konzentrationsunterschiede in Tröpfchen können sich unter bestimmten Bedingungen zeitweise im Prozess der Tropfenbildung und während des Tropfenwachstums einstellen. Die genauen mikrophysikalischen Vorgänge sind noch Gegenstand der Niederschlagsforschung und zu komplex, um an dieser Stelle näher darauf eingehen zu können. Zur Übersicht befindet sich in Tabelle 16 eine themenbezogene Auswahl von Flüssigkeiten mit deren Brechungsindizes. Die beiden organischen Säuren sind hauptsächlich in den Tropen als Aerosole vorhanden.

Flüssigkeit	Brechungsindex
Wasser H <sub>2</sub> O (0°C)[43]	1,33346
Wasser H <sub>2</sub> O (20°C)[41]	1,3330
Wasser H <sub>2</sub> O (30°C)[41]	1,3319
Wasser H <sub>2</sub> O (40°C)[41]	1,3306
Meerwasser (35‰ Salinität; 20°C)[40]	1,3393
Schwefelsäure H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> (25°C)[41]	1,427
Essigsäure C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> O <sub>2</sub> (25°C)[41]	1,370
Ameisensäure CH <sub>2</sub> O <sub>2</sub> (85%ig, chemisch rein, 20°C)[42]	1,3714

Tab.: 16 – Auswahl einiger Brechungsindizes gegen Luft (Na-D-Linie,  $\lambda = 589,3$  nm)

Unter Umgehung der mikrophysikalischen Prozesse innerhalb eines Regentropfens sollen nun einige optische Betrachtungen aus dem Vortrag von John Adam folgen.

### 5.3 Ein strahlentheoretischer Ansatz

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich nur auf die Ablenkung des Lichtes in einem inhomogenen Teilchen mit einem Brechungsindex als Funktion des Teilchenradius, so dass diese Prozesse mit Hilfe der geometrischen Optik beschrieben werden können. Bei der Annahme von optisch inhomogenen Regentropfen folgt zwangsläufig, dass der Brechungsindex im Medium nicht konstant ist. Der Strahlengang durch den Tropfen wäre dann nicht mehr eben, sondern er wird mit der radialen Änderung des Brechungsindex zunehmend weiter abgelenkt, so dass er insgesamt gekrümmt erscheint. Die Verwendung des Begriffes Gesamtablenkung ist hier im Gegensatz zu den normalen Regenbögen nicht sinnvoll, da die Ablenkung eines Lichtstrahls durch einen Gradientenindex noch zusätzlich durch die innere Refraktion bestimmt wird. Bei den normalen Regenbögen hingegen setzt sich der Gesamtablenkungswinkel aus der Summe des Brechungswinkels beim Strahleneintrittspunkt, dem inneren Reflexionswinkel(n) und dem Brechungswinkel am Strahlenaustrittspunkt zusammen. Abb. 4 zeigt den Strahlenverlauf für einen Gradientenindex im Vergleich zum konstanten Brechungsindex  $n_0$ . Im Falle gekrümmter Trajektorien kann ein Lichtstrahl je nach Struktur des Mediums zum Zentrum hin oder vom Zentrum weg abgelenkt werden (Abb. 4). Im Falle gekrümmter Trajektorien kann die Beziehung zwischen einem eintretenden und einem austretenden Lichtstrahl nicht mehr mit der Descartes-Gleichung beschrieben werden. Die Gültigkeit der Descartes-Gleichung setzt die Konstanz des Brechungsindex im Medium voraus [44]. Aus Abb. 4 sind beide Gleichungen für die Ablenkung  $\theta$  ersichtlich [44].

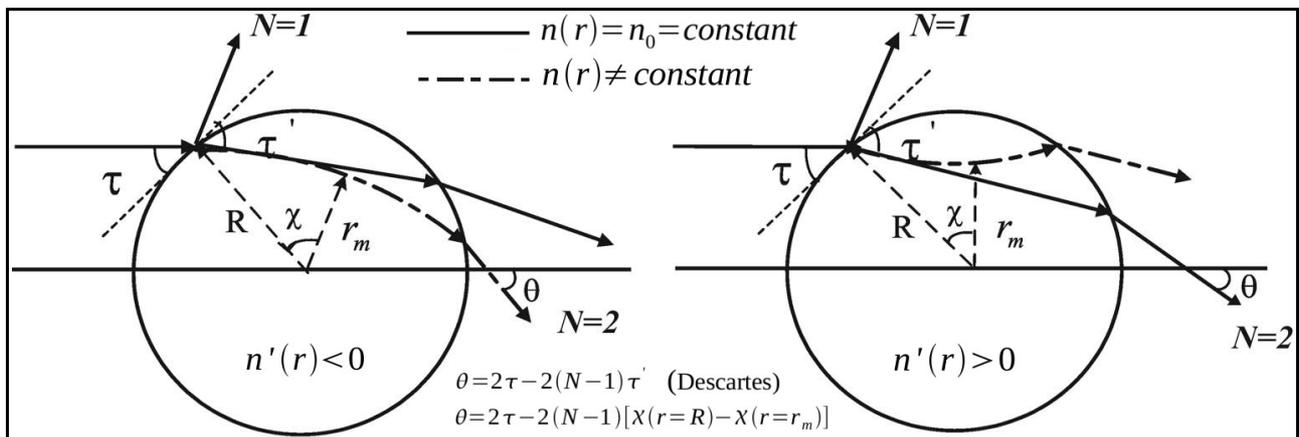


Abb.: 4<sup>10)</sup> – Strahlengänge innerhalb eines kugelsymmetrischen Mediums für einen Gradientenindex und den konstanten Brechungsindex [38]. Für  $n'(r) = n_0 = \text{constant}$  ist  $n'(r) = 0$ .  $N = 1$  äußere Reflexion;  $N = 2$  direkte Transmission;  $r_m$  aus [44] entspricht  $n(r)$  nach Adam [38].

Bei der Berechnung von  $\theta$  für einen gekrümmten Strahlenverlauf benötigt man eine Funktion, die den Betrag des Brechungsindex in Abhängigkeit vom Radius beschreibt. Genau an dieser Stelle liegt das Problem. Die gesuchte Funktion  $n(r)$  wird von den inneren chemischen und mikrophysikalischen Eigenschaften eines Tropfen bestimmt. Wie oben schon angedeutet, besteht hier noch ein erheblicher Forschungsbedarf und eine einigermaßen brauchbare Näherung dürfte dann auch noch sehr komplex sein.

In diesem Fall gibt es jedoch mathematische Verfahren, die es ermöglichen, durch spezielle Definitionen eine Menge von Lösungen für  $n(r)$  abzuleiten. John Adam [38] nutzt hier ausgehend von der geometrischen Optik die Differentialgleichungen der Lichtstrahlen [45]. Als geometrische Tropfenform wählt er für diese Präsentation die Kugelsymmetrie, da hier die Formel von Bouguer gilt. Definitionen und Ausgangsbedingungen sind zusammenfassend und schematisiert in Tab. 17 angegeben. Durch die Formel von Bouguer erhalten wir von der elementaren Geometrie aus betrachtet einen expliziten Ausdruck für Strahlen in einem kugelsymmetrischen Medium Tab. 17, 3.). Wenn  $(r, \theta)$  die Polarkoordinaten einer ebenen Kurve sind, dann ist  $\theta$  der Winkel zwischen dem Radiusvektor  $r$  zu einem Punkt  $P$  auf der Kurve. Die Tangente am Punkt  $P$  ist jetzt durch den Sinus des Winkels  $\Phi$  gegeben [45], siehe (Tab. 17, 3.) und (Tab. 17, 3.1.). Aus der Änderung dieses Winkels ( $\Phi$ ) wird anschließend der Ablenkwinkel  $D(i)$  eines unter dem Einfallswinkel  $i$  eingehenden Lichtstrahls bestimmt.

Das Fermatsche Prinzip bietet eine weitere Möglichkeit sich dem Problem zu nähern und lautet in moderner Fassung und auf dieses Problem angewendet: *Ein Lichtstrahl muß bei der Transmission durch ein inhomogenes kugelsymmetrisches Medium von Punkt  $r = 0$  bis  $r = 1$  eine optische Weglänge durchlaufen,*

die stationär ist zur Änderung des Weges. John Adam [38] formuliert das Fermatsche Prinzip in der allgemeinen Form eines Variationsprinzips (Tab. 17, 4.), weil man so die Extremale einer unbekanntem Funktion  $n(r)$  untersuchen kann. In der allgemeinen Form des Variationsprinzips ist  $ds$  das Linienelement. Gesucht wird in diesem Fall eine Funktion  $n(r)$ , welche mindestens einen stationären Wert der Form  $dn/dr = 0$  hat. Stationär bedeutet hier, dass die Änderung dieser Funktion gleich Null sein soll. Ein solcher Wert kann entweder ein Maximum, ein Minimum oder ein Wendepunkt mit einer horizontalen Tangente sein. Wie schon durch Li, Han, Li und Jiang [44] (Abb. 4) festgestellt, kann der Ablenkwinkel  $\theta$  hier nicht mehr nach dem Descartes – Verfahren bestimmt werden. Er ist damit zwangsläufig auch eine Funktion von  $r$ , so dass man unter der Bedingung  $\theta = \theta(r)$  aus der Formel von Bouguer (Tab. 17, 3.) das spezielle Variationsprinzip erhält (Tab. 17, 4.).

<p><b>1. Definitionen:</b>  <i>i</i>: Einfallswinkel  <i>r</i>: radialer Abstand in der Einheitskugel <math>0 \leq r \leq 1</math>  <math>D_0(i)</math>: Ablenkung von Strahlen (direkte Transmission)  <math>D_1(i)</math>: Ablenkung von Strahlen (eine innere Reflexion)</p>	<p>1.1.</p>
<p><b>2. Kugelsymmetrie:</b>                  Es gilt: <math>n(r)r \sin \phi = constant</math>;  <math>r =  \vec{r} </math>: Abstand vom Ursprung (Punkt auf dem Strahl);  <math>n(r)</math>: Brechungsindex (Gradientenindex);  <math>\phi</math>: Winkel zwischen <math>\vec{r}</math> und Tangente zum Strahl am Punkt P.</p>	<p>3.1.</p>
<p><b>3. Bouguer's Formel:</b> <math>r n(r) \sin \phi = constant</math> [45]  <math display="block">\sin \phi = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + (dr/d\theta)^2}}</math>;  <math>\theta</math>: Polarwinkel eines Punktes auf dem Strahl</p>	
<p><b>4. Fermat's Prinzip:</b> allgemein: <math>\delta \int n(\vec{r}) ds = 0</math>,                  speziell: wenn <math>\theta = \theta(r)</math>, dann folgt:  <math display="block">\delta \int n(r) \left[ 1 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right]^{1/2} dr = 0</math></p>	
<p><b>5. Direkte Transmission:</b> <math> D_0(i)  = 2i - \pi + 2\theta</math></p>	<p><b>6. Eine innere Reflexion:</b> <math> D_1(i)  = 2i - \pi + 4\theta</math></p>
$D_0(i) = 2i - \pi + 2 \sin i \int_{r_c(i)}^1 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}}$	$D_1(i) = 2i - \pi + 4 \sin i \int_{r_c(i)}^1 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}}$
wenn $r_c(i)^2 n^2(r_c(i)) - \sin^2 i = 0$ , dann folgt:	
$D_0(i) = 2i - \pi + 2 \sin i \int_r^1 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}}$	$D_1(i) = 2i - \pi + 4 \sin i \int_r^1 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}}$
$n(r) = n_0 = constant$ ;	
$D_0(i) = 2i - \pi + 2 \left( \frac{\pi}{2} - r \right) = 2i - 2r(i)$	$D_1(i) = 2i - \pi + 4 \left( \frac{\pi}{2} - r \right) = 2i + \pi - 4r(i)$

Tab.: 17 – Strahlentheoretische Entwicklung von  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$  für ein kugelsymmetrisches und inhomogenes Medium nach Adam [38], schematisch.

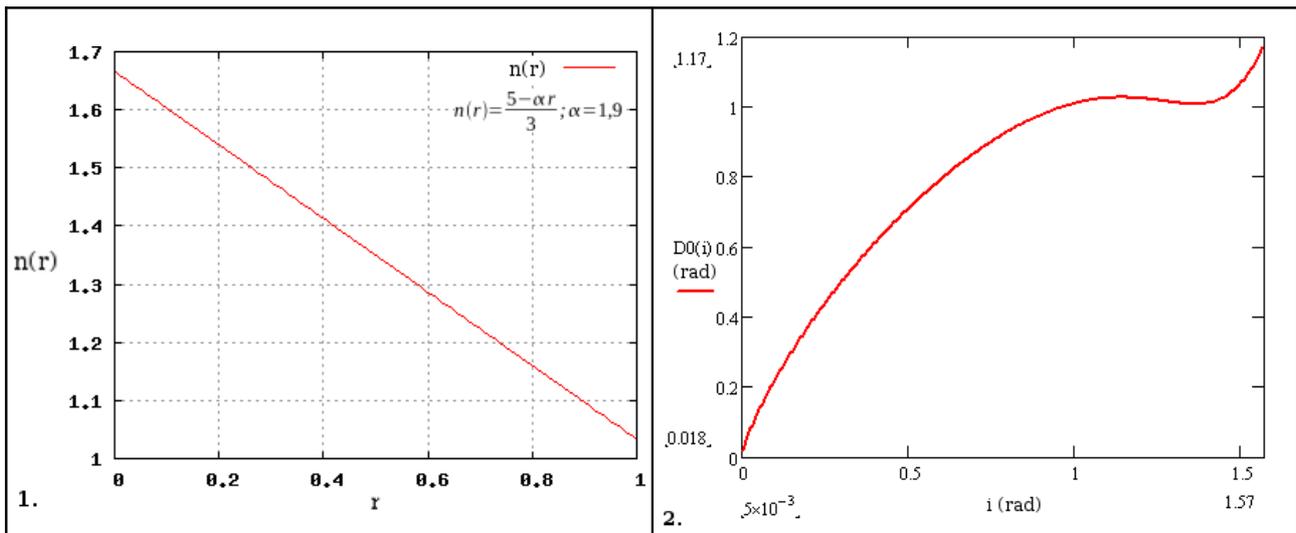
Aus diesem speziellen Variationsprinzip entwickelt John Adam [38] die Gleichungen zur Beschreibung der Ablenkung der Strahlen, einmal für die direkte Transmission ( $D_0(i)$ , Tab. 17, 5.) durch ein transparentes kugelsymmetrisches Medium und zum anderen für eine innere Reflexion im Medium ( $D_1(i)$ , Tab. 17, 6.). Der Fall ( $D_1(i)$ , Tab. 17, 6.) ist uns bereits bekannt. Hierbei handelt es sich um den Regenbogen erster Ordnung, allerdings mit einem gekrümmten Verlauf der Strahlen im Medium. Eine strahlentheoretische Näherung des primären Regenbogens unter den Bedingungen eines Gradientenindex wurde bereits von John Adam und Philip Laven [39] gegeben. Die Gleichungen für einen konstanten Gradientenindex (Brechungsindex) stellen sich hier als Spezialfälle der allgemeinen Gleichungen für  $n(r)$  dar, siehe

(Tab. 17, 5.) und (Tab. 17, 6.).

Wir haben jetzt zwar die allgemeinen Gleichungen für die Ablenkung in einem inhomogenen Medium für die beiden Fälle  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$ , aber immer noch keine Funktion die das Verhalten des Brechungsindex in Abhängigkeit vom Radius beschreibt. Über eine Verhaltensanalyse nach der Störungstheorie lassen sich eine Menge von Beziehungen für  $n(r)$  finden. Wird ein System schwach gestört, so untersucht die Störungstheorie die Abweichungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen von denen des ungestörten Systems. John Adam [38] geht in seiner Präsentation nicht auf die Störungsanalyse ein und diskutiert dafür ausgewählte und interessante Beispiele aus der Menge der Funktionen für  $n(r)$ . Eine Störungsanalyse bezogen auf den Strahlengang für inhomogene Regentropfen findet man unter Punkt 4 bei John Adam und Philip Laven [39]. Wir wollen der Linie des Vortrages [38] folgen und gehen nicht weiter auf diese Problematik ein. Statt dessen werden die folgenden Profile für  $n(r)$  als gegeben hingenommen und wir schauen uns dazu die entsprechenden Grafiken an.

#### 5.4 Regenbögen 0. und 1. Ordnung unter dem Einfluss eines Gradientenindex

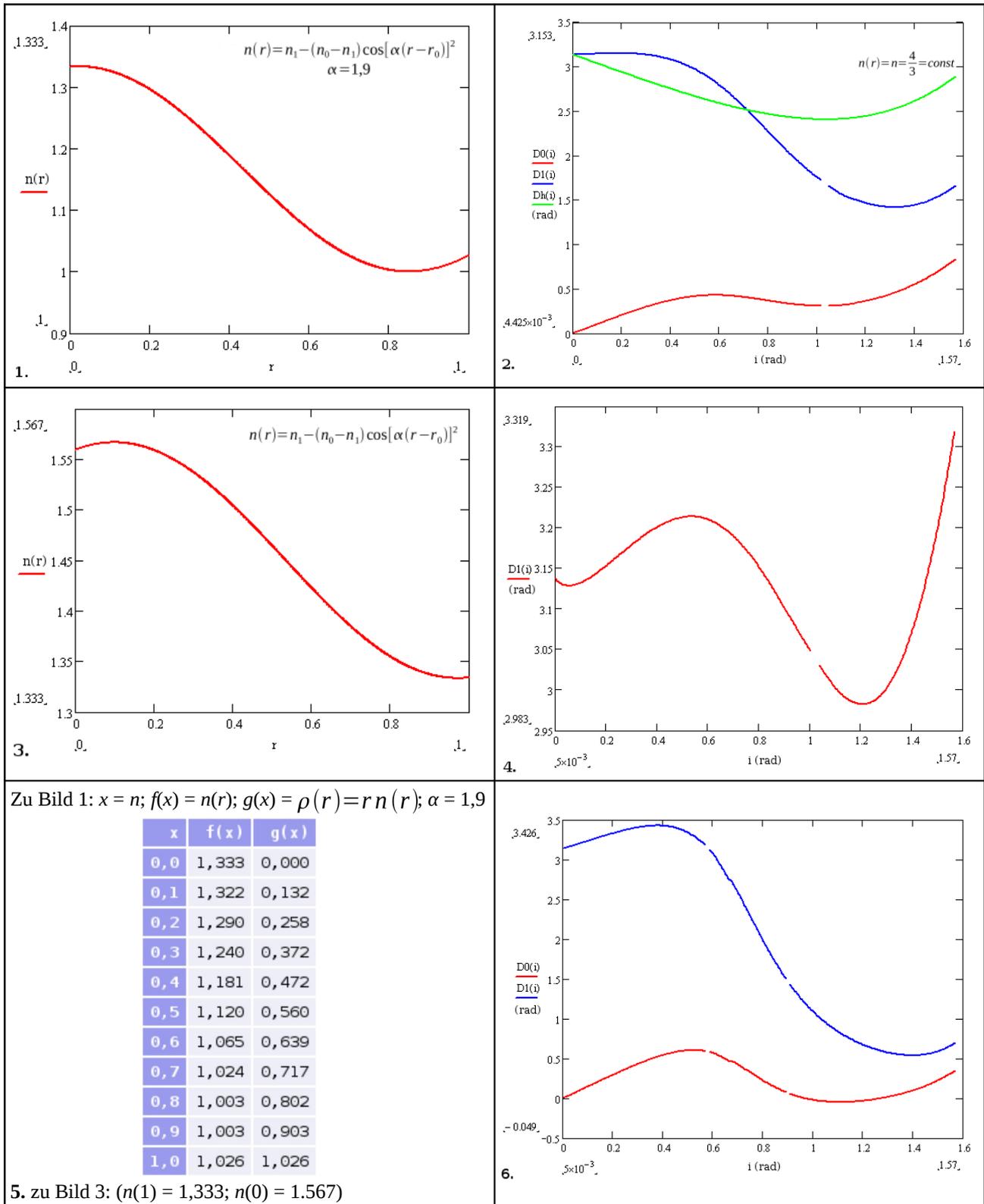
Eine Diskussion der Funktionen für  $n(r)$  ist hier notwendig, da diese nicht direkt bestimmt werden konnten, sondern über den „Umweg“ Variationsprinzip und anschließender Störungsrechnung hervorgegangen sind. Man erhält so eine Menge mathematischer Lösungen, welche einzelne Funktionen enthalten kann, die in der physikalischen Interpretation als unrealistisch erscheinen, wohl aber Bestandteil der Lösungsmannigfaltigkeit sind. Es geht nun darum physikalisch unrealistische Lösungen zu finden um diese zu verwerfen und physikalisch realistische Funktionen für weitere Betrachtungen zu verwenden. Dazu schauen wir uns nun einige Profile des Gradientenindex  $n(r)$  und das entsprechende Verhalten der Ablenkung der beide Fälle  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$  als Funktion des Einfallswinkels  $i$  an.



Tab.: 18<sup>10</sup> – Profil  $n(r) = (5 - \alpha r)/3$ ,  $\{n(0) = 1,666, n(1) = 1,033\}$  für die Ablenkung  $D_0(i)$  [rad], nach J. Adam [38]

Das erste Profil für  $n(r)$  (Tab. 18, 1.) setzt mit einem Wert von  $n(0) = 5/3$  im Zentrum eines inhomogenen Tropfens ziemlich hoch an. Dieser Wert ist für flüssige Niederschlagsformen ungewöhnlich hoch (siehe Tab. 16) und der Betrag erfüllt eher die optischen Anforderungen an Kunststoffgläser für Brillen. Das Profil von  $n(r)$  zeigt einen linear abfallenden Verlauf bis auf  $n(1) \approx 1,033$  ab, wobei dieser Betrag zu klein ist für Flüssigkeiten und wässrige Lösungen natürlichen Ursprungs. Für irgendwelche möglichen diffusen Übergänge zwischen Tropfen und Umgebung ist  $n(1)$  in diesem Fall zu groß. Die Funktion  $D_0(i)$  (Tab. 18, 2.) zeigt im Intervall  $0 < i < 0,5$  rad ( $0,5$  rad  $\approx 28,6^\circ$ ) einen steilen Anstieg, wird dann flacher, und steigt ab  $i > 1,4$  rad  $\approx 80,2^\circ$  erneut steil an. Bei einem Einfallswinkel von  $i = 1,57$  rad  $\approx 90^\circ$  beträgt die Ablenkung  $D_0(i) = 1,17$  rad  $\approx 67^\circ$ . Dieser Fall ist sowohl vom Indexprofil als auch vom daraus resultierenden Verhalten der Funktion  $D_0(i)$  unrealistisch. Eine Abweichung von  $67^\circ$  für einen Strahlengang ohne innere Reflexion kommt unter natürlichen Bedingungen wohl kaum vor.

Eine weitere Klasse von Indexprofilen mit den Abbildungen zum Verhalten der Ablenkung als Funktion eines einfallenden Lichtstrahls ist in Tab. 19. dargestellt. Die Graphen von  $n(r)$  zeigen bei veränderten Parametern definitionsgemäß den Verlauf einer deformierten Kosinusfunktion.

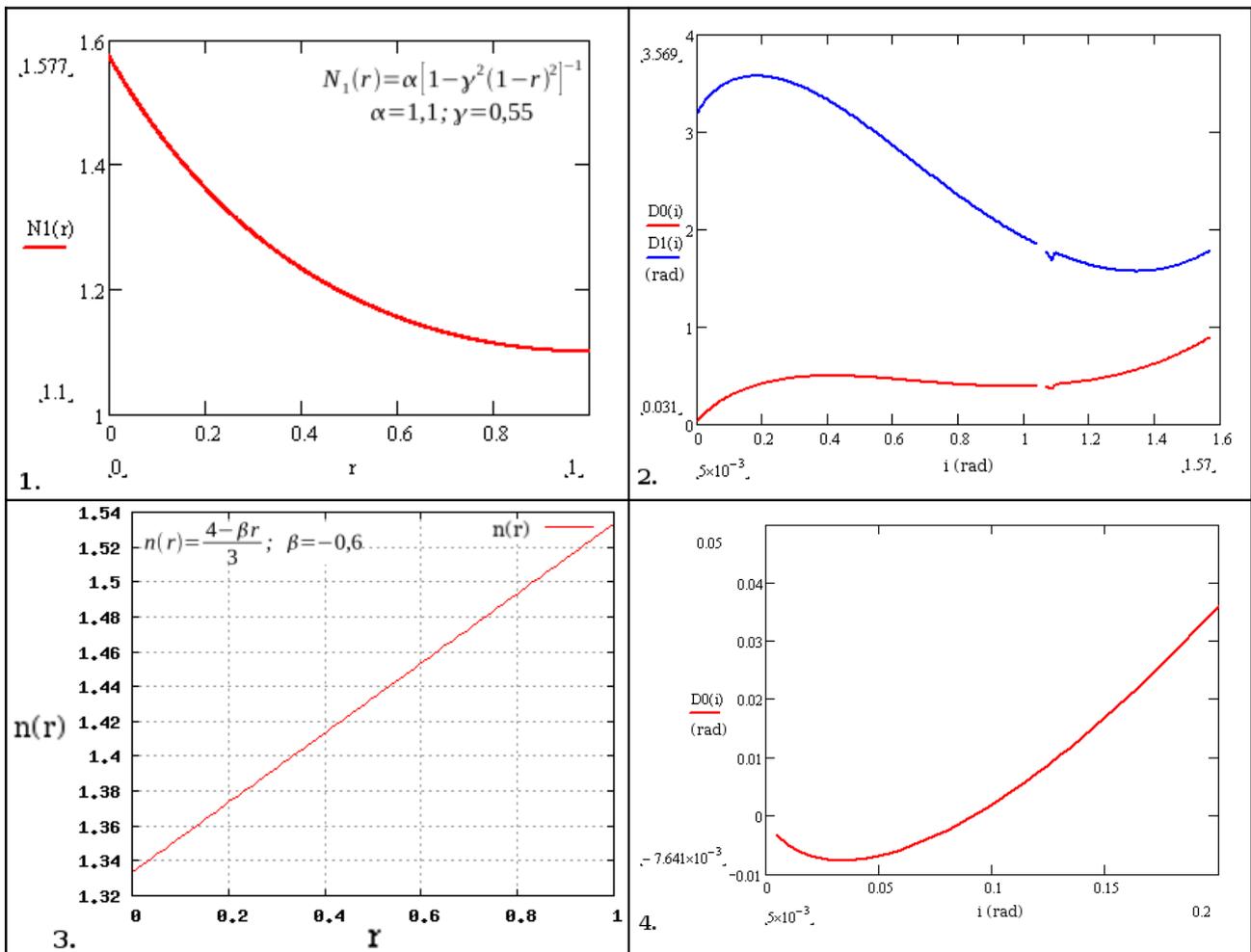


Tab.: 19<sup>10</sup> – Indexprofil  $n(r) = n_1 - (n_0 - n_1) \cos[\alpha(r - r_0)]^2$  und Ablenkung  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$  [rad], nach J. Adam [38]

Das Ausgangsprofil zeigt für  $n(0) = 4/3$  einen Wert als Maximum, welcher schon sehr nahe am Brechungsindex des Wassers liegt (Tab. 16). Das Minimum dieser Krurve befindet sich mit  $n(r)_{\min} = 1,0$  bei etwa  $r = 0,82$ . Insgesamt ist dieses Profil so angelegt, dass das Maximum bei  $r = 0$  auf Kosten der äußeren Regionen des Mediums überhöht ist (vergleiche dazu Werteliste Tab. 19, 5.). Auf der rechten Seite (Tab. 19, 2.) befindet sich die Grafik für  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$ . Die Extremwerte für  $D_1(i)$  von  $3,153 \text{ rad} \approx 180,7^\circ$

und etwa  $1,4 \text{ rad} \approx 80,2^\circ$  zeigen einen doppelten Regenbogen erster Ordnung. Zur Orientierung ist in dieser Grafik auch die Ablenkung für einen konstanten Brechungsindex  $n = 4/3$  ( $D_h(i)$ ) als grüne Kurve eingezeichnet. Ein doppelter Regenbogen nullter Ordnung ergibt sich ebenfalls aus  $D_0(i)$  bei ca.  $23^\circ$  und  $46^\circ$ .  $D_0(i)$  hat für  $i \approx 57,3^\circ$  noch ein weiteres lokales Minimum (ca.  $17^\circ$ ), welches aufgrund des geringen Winkelabstandes vom ersten Maximum nicht sicher als weiteren Bogen gewertet werden kann. Unter realen Bedingungen dürfte unter Berücksichtigung aller Unsicherheiten dieses Minimum vom ersten Maximum überlagert werden. Beim Betrachten der Grafik fällt sofort auf, dass die Kurve von  $D_0(i)$  wesentlich flacher verläuft als die von  $D_1(i)$ . Der Grund hierfür liegt der geringeren Ablenkung vom Eintritt bis zum Austritt, da der Strahlengang für den Regenbogen nullter Ordnung keine innere Reflexion hat. Die Ablenkung wird hier nur durch die Refraktion verursacht.

Das gleiche Indexprofil, allerdings mit leicht veränderten Parametern ist in Tab. 19, 3. zu sehen. Leider hat John Adam [38] die Parameter nicht angegeben, so dass hier nur allgemeine Aussagen möglich sind. Die Kurve (Tab. 19, 3.) zeigt einen insgesamt höheren Gradientenindex, wobei das Maximums mit einem Wert von 1,567 schon wieder sehr hoch ist. Das Minimum erreicht mit einem Betrag von 1,333 bei etwa  $r = 0,9$  wieder eine realistische Größenordnung. Obwohl der Gradient in Tab. 19, 3. im Mittel nur etwa um 0,3 höher ist im Vergleich zum Gradienten in Tab. 19, 1., zeigt die entsprechende Kurve für die Ablenkung  $D_1(i)$  (Tab. 19, 4.) deutliche Extrema, was in diesem Fall einen dreifachen Regenbogen 1. Ordnung bedeuten würde. Dieses Beispiel zeigt weiterhin, dass die Lichtablenkung sensibel auf eine Änderung des Gradientenindex reagiert.



Tab.: 20<sup>10</sup> – Indexprofile  $N_1(r) = \alpha[1 - \gamma^2(1 - r)^2]^{-1}$ ;  $n(r) = (4 - \beta r)/3$  sowie Ablenkung  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$  [rad] nach J. Adam [38]

Eine weitere leichte Veränderung der Parameter im Gradientenindex führt ebenfalls zu einem doppelten Regenbogen 1. Ordnung und einen doppelten Regenbogen 0. Ordnung (Tab. 19, 6.). Zu diesem Fall hat John Adam [38] weder die entsprechenden Parameter noch das grafische Indexprofil angegeben.

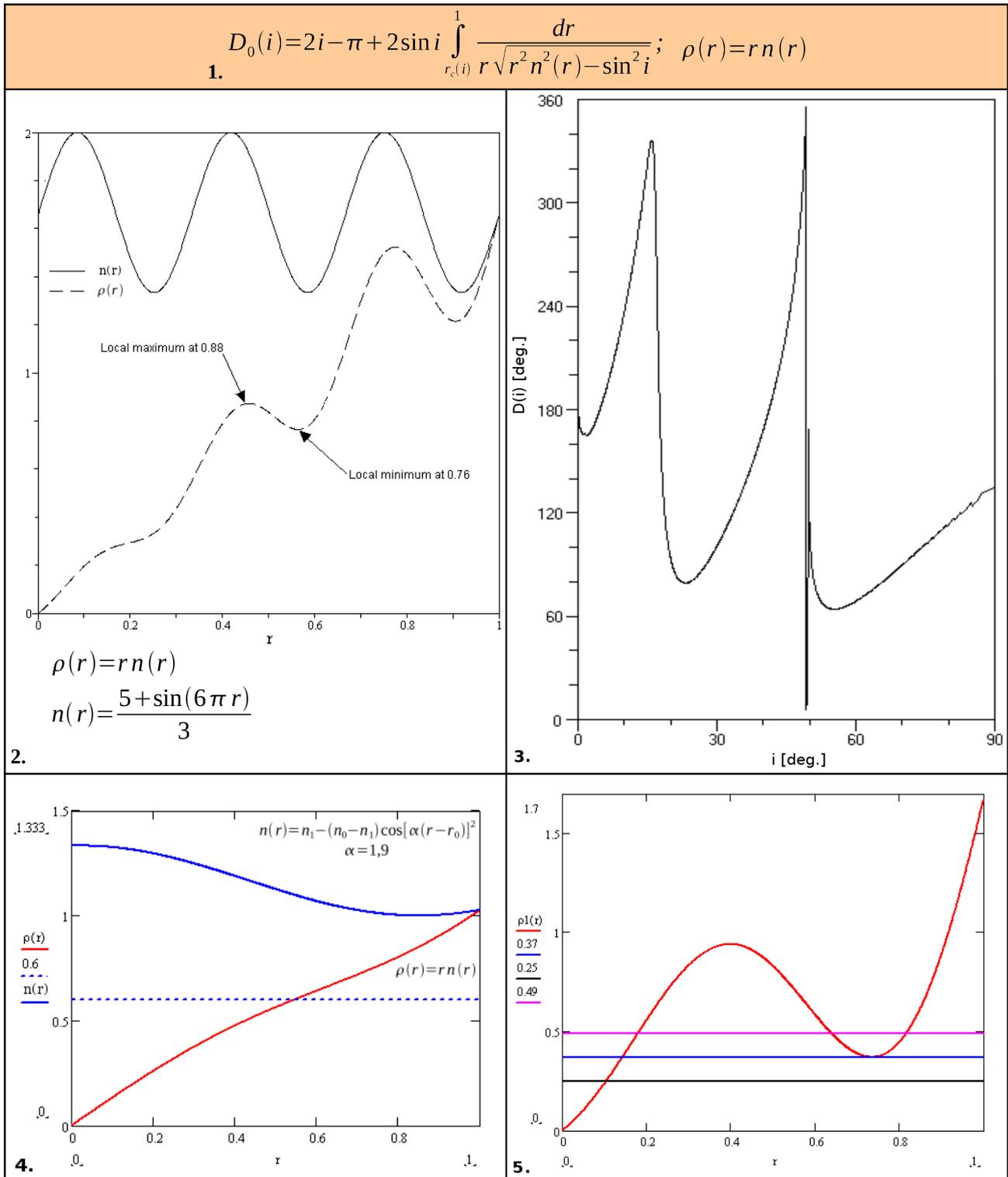
Zwei weitere Indexprofile befinden sich in Tab. 20, wobei das erste Profil mit einem Maximum von  $n(0) = 1,577$  wieder sehr hoch ansetzt und dann auf  $n(1) = 1,1$  abfällt (Tab. 20, 1.). Dieses Profil lässt theoretisch wieder einen flachen Zwillingregenbogen nullter Ordnung und einen gut ausgebildeten doppelten Regenbogen erster Ordnung entstehen (Tab. 20, 2.). Das letzte zu besprechende Profil (Tab. 20, 3.) zeigt wieder ein lineares Verhalten. Im Gegensatz zum Profil in Tab. 18, 1. liegt hier das Minimum mit  $n(0) = 4/3$  im Zentrum des Mediums. Der Brechungsindex wächst dann monoton auf ein Maximum von  $n(1) = 1,53$  an. Das entsprechende Ablenkverhalten eines Strahls  $D_0(i)$  (Tab. 20, 4.) weist ein Minimum auf, welches noch innerhalb der Sonnen- und Mondscheibe liegen würde. Genau wie der Graph von  $D_0(i)$  in Tab. 18, 2. ist diese Kurve insgesamt viel zu steil für einen Regenbogen nullter Ordnung. Dieses Profil können wir ebenfalls gestrost verwerfen.

Eine weitere Möglichkeit zur Diskussion von ausgewählten Fällen aus der Lösungsmannigfaltigkeit bietet die Untersuchung von Singularitäten in den Strahlengängen. Dazu schauen wir uns zuvor das Indexprofil (Tab. 21, 2.) und den entsprechen Strahlengang (Tab. 21, 3.) an. Zur besseren Darstellung des Indexprofils wird zusätzlich zu der bereits bekannten Funktion  $n(r)$  noch die Gleichung  $\rho(r) = rn(r)$  (siehe Tab. 22, 8.) als Funktion zur Bestimmung der Wende- und Umkehrpunkte für einen einfallenden Lichtstrahl ohne Berücksichtigung der inneren Reflexion definiert (Tab. 21, 1.). Auffällig in (Tab. 21, 3.) sind die mehrfachen Extremwerte und das scheinbar singuläre Verhalten in der Nähe von  $i \approx 49,5^\circ$  in Verbindung mit dem kleinsten Minimum von  $\rho(r) = \arcsin(0,76) \approx 49,5^\circ$ . Die Funktion  $\rho(r)$  hat ein lokales Maximum bei  $\rho(r)_{\max} = 0,88$  und ein lokales Minimum bei  $\rho(r)_{\min} = 0,76$  (Tab. 21, 2.). Für die folgenden Betrachtungen ist das Intervall  $0 \leq \rho \leq 1$  von besonderem Interesse, da der Umkehrpunkt von  $\rho$  durch die Gleichung  $\rho(r) = \sin(i)$  definiert ist. Somit ist die vertikale Achse (Tab. 21, 2.) gleichbedeutend mit  $\sin(i)$  soweit  $\rho$  davon betroffen ist. Bei einem Einfallswinkel  $i$  von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  bewegt sich der Strahl innerhalb des kugelsymmetrischen inhomogenen Mediums, bis er auf den Umkehrpunkt  $\rho$  trifft und dort abgelenkt wird [39]. In unserem Fall (Tab. 21, 3.) beträgt die Ablenkung  $D(i)$  für das lokale Minimum  $\rho(r)_{\min} = 0,76$ ,  $i \approx 49,5^\circ$ ,  $D(i) \approx 340^\circ$  und für  $\rho(r)_{\max} = 0,88$ ,  $i \approx 50,4^\circ$  beträgt  $D(i) \approx 170^\circ$ . Das bedeutet, die scheinbare Singularität in (Tab. 21, 3.) entsteht durch die große Differenz von  $D(i) = 170^\circ$  zwischen  $\rho(r)_{\min}$  und  $\rho(r)_{\max}$ . Ein Lichtstrahl kann unter diesen Bedingungen nicht weiter in das Medium eindringen und verhält sich ähnlich einer Maximalablenkung. Das Profil (Tab. 21, 5.) ist dem von (Tab. 21, 2.) ähnlich und wurde nur zur Erläuterung der folgenden theoretischen Betrachtungen hier eingeführt, da es einfacher und leichter zu handhaben ist. Hierbei handelt es sich also um eine vereinfachte Funktion, welche für alle weiteren Betrachtungen zur Singularität als „Modellfunktion“ dienen soll. Zum besseren Vergleich zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen Indexprofilen ist hier noch jenes aus (Tab. 19, 1.), um die Funktion  $\rho(r)$  vervollständigt (Tab. 21, 4.), hinzugefügt worden.

Wie ist dieses singuläre Verhalten nun zu erklären? Dazu werfen wir einen Blick in Tab. 22. Dort betrachten wir das Intervall  $I(i)$  in den Grenzen von  $r_c(i)$  bis 1 (Tab. 22, 1.), wieder bezogen auf die Einheitskugel (Tab. 17, 1.). Ist der Anstieg einer beliebigen Funktion des Indexprofils  $rn(r)$  ungleich Null, so zeigt die Funktion ein monotonen Verhalten (siehe Tab. 22, 2., Tab. 22, 4. und Tab. 22, 6.). Ist dieser Anstieg aber gleich Null, so ist der Verlauf von  $\rho(r) = rn(r)$  nicht mehr monoton, sondern er führt in eine logarithmische Singularität (siehe Tab. 22, 3., Tab. 22, 5. und Tab. 22, 7.). In der Streutheorie ist diese logarithmische Singularität mit dem Phänomen des Orbits verbunden. Ein Extremum der Funktion  $\rho(r) = rn(r)$  für  $n'(r) = -[n(r_c)/r_c] < 0$  (siehe Abb. 4) tritt dann auf, wenn  $n(r)$  entweder ein lokales Minimum bei  $r = r_m > r_c$  besitzt, oder  $n(r)$  monoton auf einen konstanten Wert von  $r$  steigt.

Das Indexprofil (Tab. 21, 4.) zeigt im gesamten Intervall  $0 \leq r \leq 1$  ein monotonen Verhalten, während die „Modellfunktion“ (Tab. 21, 5.) nicht monoton ist, da sie im gleichen Intervall ein Maximum und ein Minimum aufweist.

Beide Möglichkeiten der Strahlenablenkung sind in den Abbildungen (Tab. 22, 9. und Tab. 22, 10.) schematisch dargestellt. Diese schauen wir uns nun genauer an.



Tab.: 21<sup>10)</sup> – Singuläres Verhalten der Strahlen für ein nicht monotonen Indexprofil  $n(r) = [5 + \sin(6\pi r)]/3$  und  $\rho(r) = r n(r)$  (2. und 3.) und ein allgemeiner Vergleich zwischen einem monotonen (4.) und nicht monotonen (5.) Indexprofil nach J. Adam [38].

Der einfachere Fall wird durch die Monotonie eines Gradientenindex beschrieben (Tab. 22, 9.). Wenn  $i$  zunimmt, nimmt auch  $r$  zu und verändert sich wie eine Funktion von  $i$ , zuerst langsam und später schneller, weil der Anstieg von  $\rho$  sich weiter abflacht, bis der Wendepunkt  $r_i$  erreicht ist. Der Wendepunkt  $r_i$  ist vorhanden wenn die zweite Ableitung von  $\rho$  gleich Null und die dritte Ableitung von  $\rho$  ungleich Null ist. J. Adam [38] hat den Wert dieses Wendepunktes mit 0,6 bestimmt und er ist in Tab. 21, 4. eingezeichnet und Tab. 22, 9. symbolisch hervorgehoben.

<p>1. <math>I(i) = \int_{r_c(i)}^1 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}}</math>; <math>r_c(i)^2 n^2(r_c(i)) - \sin^2 i = 0</math></p>	
<p>2. <math>\left[ \frac{d}{dr}(rn(r)) \right] \neq 0</math></p>	<p>3. <math>\left[ \frac{d}{dr}(rn(r)) \right] = 0</math></p>
<p>4. <math>I = \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}} \rightarrow (r - r_c)^{1/2} \rightarrow 0</math></p>	<p>5. <math>I = \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}} \rightarrow \ln r - r_c  \rightarrow -\infty</math></p>
<p>6. <math>r \rightarrow r_c^+</math>, monoton</p>	<p>7. <math>r \rightarrow r_c, \rho = rn(r)</math> ist nicht monoton</p>
<p>8. <math>\int_{\bar{r}}^1 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \sin^2 i}} = \int_{\bar{r}}^1 \frac{dr}{r \sqrt{\rho^2(r) - \sin^2 i}}</math></p>	
<p>9. <math>\rho(r) = rn(r) = r(n_1 - (n_0 - n_1) \cos[\alpha(r - r_0)]^2)</math> <math>\alpha = 1,9</math></p>	<p>für <math>\sin i_3, \sin i_1</math> gilt <math>\left[ \frac{d}{dr}(rn(r)) \right] \neq 0</math> für <math>\sin i_2</math> gilt <math>\left[ \frac{d}{dr}(rn(r)) \right] = 0</math></p>
<p>11. <math>D_1(i_c) = 2 \arccos \left[ \frac{1}{n^2} \left( \frac{4 - n^2}{3} \right) \right]^{3/2} \equiv (3 - \sqrt{5})\pi \Rightarrow n = \frac{2}{\left[ 1 + 3 \cos \left( \left[ \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right] \pi \right) \right]^{1/2}}</math></p>	

Tab.: 22<sup>10)</sup> – Vergleich der zwei unterschiedlichen Indexprofile mit Darstellung des Wendepunktes  $r_i$  und des Umkehrpunktes (logarithmischen Singularität)  $r_c$ , sowie der konstanten Strahlenablenkung  $D_1(i_c)$  nach J. Adam [38].

Etwas komplizierter wird die Sache im Falle eines nicht monotonen Verhaltens der Funktion des Gradientenindex  $\rho(r) = rn(r)$  (Tab. 22, 10.), bezogen auf das gesamte Intervall. In dieser Grafik sind drei individuelle Strahlengänge eingezeichnet. Im ersten Fall ( $\sin i_1$ ) erreicht der Strahl einen Punkt auf der Kurve an dem das Verhalten monoton steigend ist, aber er trifft nicht auf einem Wendepunkt  $r_i$ , so dass der Strahl seinen Weg fortsetzen kann. Im Falle von  $\sin i_2$  trifft der Strahl tangential auf ein Minimum, welches nach Tab. 22, 5. in die logarithmische Singularität führt. Das Minimum ist dadurch gekennzeichnet, dass die erste Ableitung von  $\rho(r) = rn(r)$  gleich Null und die zweite Ableitung dieser Funktion größer Null ist. Wir bezeichnen  $r_c$  hier als Umkehrpunkt um Verwechslungen mit dem mathematischen Begriff „Wendepunkt“ zu vermeiden. Wie bereits oben angedeutet, kann der Strahl nicht weiter in das Medium vordringen, denn er wird um den Bereich  $\Delta r$  herumgeführt. Siehe dazu die scheinbare Singularität am lokalen Minimum in Tab. 21, 3. Der dritte Fall ( $\sin i_3$ ) ist dem ersten Fall ( $\sin i_1$ ) wieder sehr ähnlich, da an diesem Punkt weder ein Minimum noch ein Wendepunkt vorhanden ist. Auch hier ist der Graph an diesem Punkt wieder monoton steigend. Die drei besprochenen Fälle sind in Tab. 21, 5. ebenfalls dargestellt und die entsprechenden Werte können an der Ordinate abgelesen werden.

J. Adam [38] geht in seinen weiteren Ausführungen auf die Bedeutung der logarithmischen Singularität in anderen Teilgebieten der Physik ein, z. B. auf die Interpretation als Potentialwall. Diesen Ausführungen wollen wir nicht weiter folgen, da wir uns in dieser Reihe auf die Regenbögen spezialisiert haben. Am Schluss seine Ausführungen präsentierte J. Adam [38] noch ein weiteres, sowohl interessantes als auch

verblüffendes Ergebnis für die Ablenkung eines Strahles  $D_1(i)$  am Umkehrpunkt  $D_1(i_c)$  (Tab. 22, **11.**). Er identifiziert diesen Ablenkwinkel mit  $(3 - \sqrt{5})\pi$  [rad], einem aus dem Goldenen Schnitt abgeleiteten Goldenen Winkel von  $\approx 137,5^\circ$ . Den Brechungsindex an diesem Punkt bestimmt er mit  $n \approx 1,38438$ , welcher auch plausibel erscheint. Verblüffend an diesem Ergebnis ist, dass der in der freien Natur verbreitet anzutreffende Goldene Schnitt auch hier auftritt. In Anlehnung an den Goldenen Schnitt bezeichnet J. Adam [38] diesen speziellen Regenbogen als den „Goldenen Regenbogen“.

In seiner Präsentation hat J. Adam eine elegante Lösung aus der Gradientenoptik vorgestellt, welche die Formenvielfalt der theoretisch möglichen Regenbögen weiter erhöht. Die Existenz des Regenbogens nullter Ordnung, bereits von Newton vermutet, nach der klassischen geometrischen Optik nicht sichtbar, ist in der Gradientenoptik jetzt theoretisch möglich. Der Regenbogen erster Ordnung kann je nach Indexprofil auch mehrfach auftreten.

## 5.5 Zusammenfassung und Diskussion

In Anlehnung an die Kapitel 4 und 5 soll auch hier wieder die Beziehung zur Praxis hergestellt werden. Bei den beiden vorangegangenen Teilen kann die Beobachtung einen willkommenen Beitrag zur weiteren Stützung und Verfeinerung der Theorien liefern. In diesem Fall ist die Situation jedoch völlig anders. Die Beobachtung stellt hier ein notwendiges Mittel zur Verifizierung der oben besprochenen Theorie dar. Warum? Dazu erinnern wir uns an den Ausgangspunkt aller Überlegungen. Das Funktional des Gradientenindex  $n(r)$ , worauf alle oben genannten Prozesse beruhen, ist im Detail unbekannt. Bekannt ist nur, dass sich der Brechungsindex  $n$  mit dem Abstand  $r$  von Zentrum des Regentropfen ändert. Die Mathematik liefert dazu geeignete Verfahren um sich dem Problem über ein Variationsprinzip zu nähern. Man erhält im Endeffekt zwar nicht die Lösung, sondern gleich eine Menge von Lösungen. Aus dieser Lösungsmannigfaltigkeit werden die physikalisch realistischen Lösungen weiter untersucht, was bereits geschehen ist. Physikalisch unrealistische Lösungen kann man getrost verwerfen. Es ist unbedingt notwendig die weiter diskutierten Lösungen durch die Beobachtung zu verifizieren, denn es ist nicht gesagt, dass all diese Prozesse in der freien Natur auch so ablaufen. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, dass diese Theorie auf der Grundlage der Kugelsymmetrie entwickelt wurde, was in der Endkonsequenz wieder idealisierte Prozesse bedeutet. Dieses Verfahren mag in erster Hinsicht wie an den Haaren herbeigezogen erscheinen, ist aber ein legitimes Mittel um für bestimmte komplexe Probleme theoretische Lösungen zu finden. Einige große Theorien wurden nach diesem Verfahren entwickelt. Genannt sei an dieser Stelle nur die allgemeine Relativitätstheorie.

Genau an dieser Stelle beginnt das Problem. Wie soll man durch einen Gradientenindex entstandene Regenbögen erkennen, wenn nicht einmal die Funktion  $n(r)$  genau bekannt ist? In der klassischen geometrischen Optik hat man wenigstens noch die zu den jeweiligen Regenbögen gehörenden Ablenkwinkel  $\theta$  als Entscheidungshilfe zur Verfügung. Die in diesem Fall auftretenden Winkel  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$  sind mit dem Gradientenindex korreliert und daher ebenfalls unbekannt, können zudem in Abhängigkeit vom Indexprofil noch sehr unterschiedlich sein.

Trotz vieler unbekannter Größen gibt es dennoch Anhaltspunkte, die eine Identifizierung derartiger Regenbögen ermöglichen. In der Mehrzahl aller Fälle dürften es unscheinbare Details sein, die auf einen Gradientenindex als Ursache schließen lassen. Nur bei markanten Indexprofilen kann man mit spektakulären Erscheinungen rechnen. Spektakuläre Erscheinungen wären der Regenbogen nullter Ordnung und der Mehrfachregenbogen erster Ordnung. Beim Regenbogen nullter Ordnung ist die Farbfolge aufgrund der fehlenden inneren Reflexion, genau so wie beim Regenbogen zweiter Ordnung, nämlich Rot befindet sich auf der Innenseite des Bogens. Da die Brechung des Lichtes bei inhomogenen Tropfen nicht auf den Eintritts- und Austrittspunkt beschränkt ist, sondern entsprechend des Indexprofils noch die innere Refraktion hinzukommt, kann man davon ausgehen, dass das Farbband breiter und auch die Dispersion größer ist als bei gewöhnlichen Regenbögen. Ist der Gradientenindex groß genug, dann sind auch alle Spektralfarben erkennbar. Wie ein Regenbogen aussehen könnte, wenn er durch einen thermischen Gradientenindex verursacht wurde, zeigt Abb. 2. Claudia Hinz bemerkte, dass dieser Bogen breiter war als gewöhnlich, was sie zu einer Aufnahme mit einem 300 mm Teleobjektiv [46] veranlasste.



Abb.: 5 – Regenbogen mit gut ausgeprägter Dispersion, entstanden in Niederschlag mit großen Tropfen. Aufnahme Claudia Hinz 19. Januar 2007, Auflösung: 3888 x 2591 Pixel; Belichtungszeit: 1/320; Zoom: 60mm bei 35 mm-Objektiv; Blende: f/13,0; CCD-Größe: 22,28 mm. Mit freundlicher Genehmigung von Claudia Hinz.

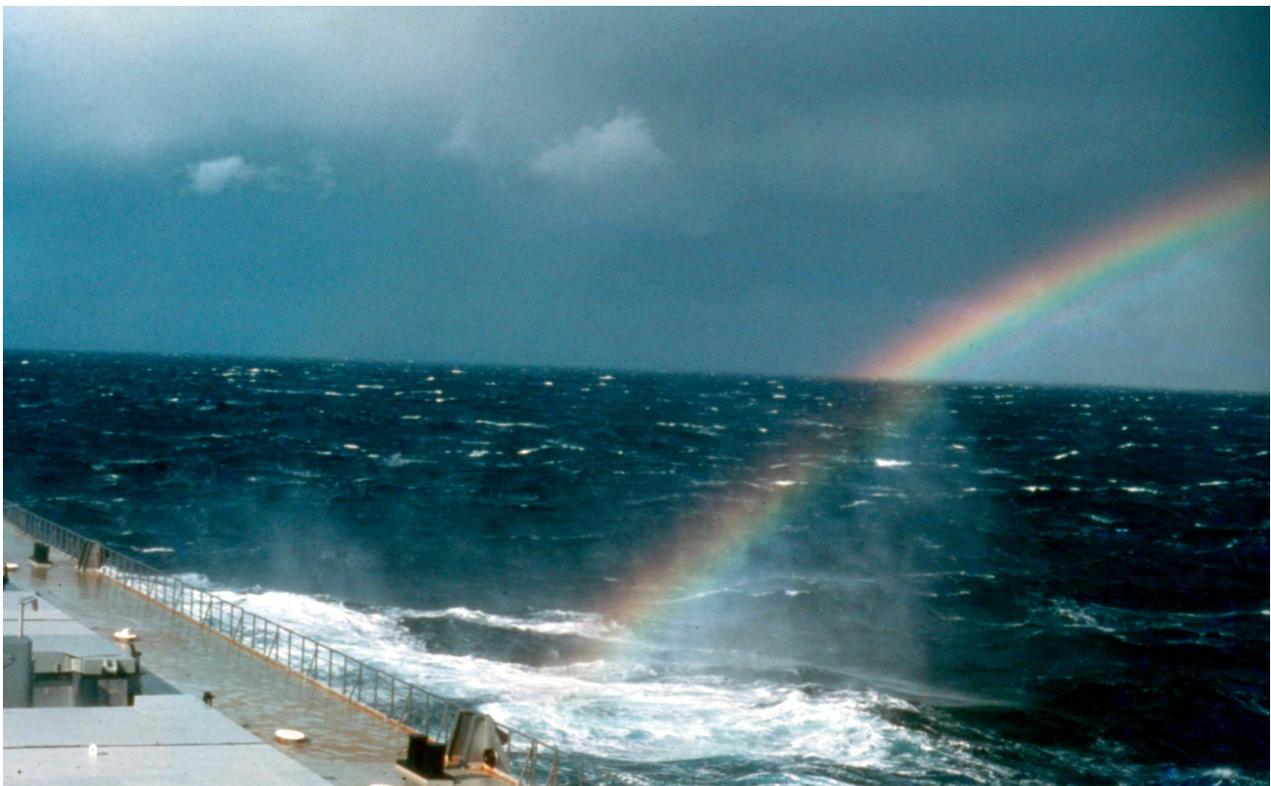


Abb.: 6 – Gebrochener Regenbogen, entstanden in Meerwassertropfen und im Niederschlag, © Günther Können, Aufnahme von J. Dijkema, 1981 im Pazifik, mit freundlicher Genehmigung von Günther Können.

Die Fotoserie von insgesamt 91 Aufnahmen zeigt, dass alle Spektralfarben vorhanden waren, wobei Rot und Gelb nur in schmalen Streifen auftraten. Interferenzbögen waren nicht erkennbar. Nach M. Minnaert [47] ist die Breite des Farbbandes etwa proportional zu  $r^{-2/3}$ . Variiert man nun den Radius  $r$  eines homogenen Tropfens, so ändert sich die Erscheinung auf Kosten irgend einer Spektralfarbe (vergleiche M. Minnaert, S.251 [47]). Bei einem hinreichend großen Indexgradienten mit entsprechend höherer Dispersion dürfte die Änderung von  $r$  in einem inhomogenen und großen Tropfen die Spektralfarben zwar schmaler erscheinen, aber nicht völlig verschwinden lassen. Die Farben verschwinden auch hier, aber erst wenn die Tropfen hinreichend klein sind. Der Regenbogen in unserem Beispiel (Abb. 5) entstand am 19. Januar 2007 in hauptsächlich großen Tropfen. Ein thermischer Gradientenindex kann sich einstellen, wenn die Tropfen in einer winterlichen Atmosphäre entstehen, während des Ausfallens vollständig schmelzen und dabei deutlich wärmere Luftschichten durchqueren. Wasser ist ein schlechter Wärmeleiter so dass sich auch ein Gradientenindex aufbauen kann. Die Wärmeleitfähigkeit von Wasser beträgt bei 0°C: 0,551; bei 50°C: 0,648 und bei 100°C: 0,683 [W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>], [48]. Die Wärmeleitfähigkeit bei Flüssigkeiten ist bei Temperaturen um 0°C noch geringer als bei höheren Temperaturen. Sehen wir uns den Brechungsindex von Wasser bei unterschiedlichen Temperaturen an (Tab. 16), so variiert dieser bei Temperaturen von unter 20°C erst an der vierten Stelle nach dem Komma, so dass man bei einem thermischen Gradientenindex als alleinige Ursache keine spektakulären Erscheinungen erwarten darf. Allgemein kann man sagen: Tritt im Winter ein Regenbogen auf, der breiter ist als gewöhnlich, dann sollte er auf jeden Fall vorsorglich fotografiert werden, wenn möglich in einer Serie. Die Feststellung, ob ein Gradientenindex wahrscheinlich ist, kann nur durch physikalische Betrachtungen der Atmosphäre in Verbindung mit der Niederschlagsbildung entschieden werden. Ein Foto eines dazugehörenden und besonderen Regenbogens wäre ein brauchbarer Beleg dafür.

Die Natur hält noch eine weitere Möglichkeit bereit, einen Gradientenindex zu bilden. Es ist der Konzentrationsunterschied in einem Regentropfen. Auch hier ist das Indexprofil wieder eng mit der Niederschlagsbildung und der Physik der Atmosphäre verbunden. Ein Regentropfen entsteht durch Kondensation an einem Aerosol. Ist dieses Aerosol ein Meersalzpartikel, bestehen gute Voraussetzungen zu Bildung von transparenten Tropfen mit einem Gradientenindex. Schauen wir uns in Tab. 16 den Unterschied im Brechungsindex zwischen Wasser und Meerwasser an, so variiert dieser bereits an der dritten Stelle nach dem Komma. Die Wirkung der unterschiedlichen Brechungsindizes zeigt Abb. 6 sehr gut. Der linke Teil des Bogens entstand in Meerwassertropfen und der rechte Teil erschien in gewöhnlichen Niederschlag. Durch den größeren Brechungsindex von Meerwasser erscheint der Radius des Bogens in Meerwasserspritzer kleiner als der Radius des Regenbogens. Ähnliche Beobachtungen liegen auch von Volz [49] vor. Während einer Atlantiküberfahrt im Jahre 1958 konnte er mehrfach einen doppelten Regenbogen beobachten und hat festgestellt, dass der Bogen in Meerwassertropfen im Radius etwa um 1° kleiner ist als der gewöhnliche Regenbogen. In beiden Fällen sind die Bögen in unterschiedlichen Medien entstanden. Einen Hinweis auf einen Gradientenindex gibt es hier allerdings nicht.

Der Gradientenindex entsteht hier schon während der Niederschlagsbildung. Durch die Kondensation von Wasserdampf am Meersalzpartikel bilden sich Tröpfchen in Form von wässrigen Lösungen mit einem Kern von erhöhter Konzentration, die dann radial nach außen hin abnimmt. Jetzt kommt es darauf an, dass der Tropfenbildungsprozess schnell genug abläuft und die Verweildauer in der Wolke durch die vertikale Turbulenz nicht zu groß ist, so dass der entstehende Tropfen ausfallen kann bevor die Diffusion einen Konzentrationsausgleich hervorruft, dann kann man mit weiteren Sonderformen rechnen. Die ideale Wetterlage für das Entstehen von Regenbögen unter derartigen Bedingungen ist eine Sturm- oder Orkanwetterlage mit möglichst langer Streichrichtung des Windes über das salzhaltige Meer. Nach dem Abzug des Orkans ist die Luft hochgradig angereichert mit Meersalzaerosolen. Es herrschen nun ideale Bedingungen für das Entstehen von Bögen, die durch Meersalzkonzentrationsunterschiede im Tropfen, spektakuläre Sonderformen hervorbringen können. Für die Beobachtung solcher Erscheinungen sind Küstenbewohner sowie Seefahrer deutlich im Vorteil. Nach solchen Wetterlagen sollte die Kamera ständig bereit sein.

Von den spektakulären Erscheinungen die möglicherweise aufgrund von inhomogenen Tropfen hervorgerufen wurden, ist eine Beobachtung überliefert. Auch in diesem Fall ist es nicht sicher ob dieser Komplex von Regenbogenercheinungen wirklich auf einen Gradientenindex zurückzuführen ist. Die Beschreibung fügt sich jedenfalls gut in die theoretischen möglichen Mehrfachregenbögen erster Ordnung ein, wie sie im theoretischen Teil dieses Aufsatzes beschrieben wurden. Daher soll diese Beobachtung hier Erwähnung finden. Arthur H. Wallker beobachtete am 5. November 1913 in Umtali (heute Mutare) in Rhodesien (heute Simbabwe) einen sechsfachen Regenbogen [50]. Er schreibt dazu: „Gestern, den 5. November um 5.40 Uhr

nachmittags, wenig bevor die Sonne hinter den Bergen verschwand, bemerkte ich im Osten sechs brillante Regenbögen, mit einer Länge von etwa  $\frac{1}{4}$  eines Kreises. Fünf waren ganz dicht beieinander, und der sechste etwas entfernt, wie auf beigefügter grober Skizze. Diese zusätzlichen Bögen scheinen keine überzähligen zu sein, weil sie gut getrennt sind vom (vermuteten) primären Bogen auf der rechten Seite. Sie sind dem primären Bogen in der Breite gleich, und zeigen auch alle Farben.“<sup>11)</sup>[51].

Herr Wallker muss die Problematik um die Interferenzbögen gekannt haben, denn weist vorsichtig darauf hin, dass die fünf zusammenhängenden Bögen nicht zu den überzähligen Bögen gehören. Leider sind von diesem Datum keine zuverlässigen Wetterdaten zu bekommen, so dass sich hier ein möglicher Zusammenhang mit einem Gradientenindex nicht weiter erhärten lässt. Es bleibt nur zu hoffen, dass in neuerer Zeit solche ungewöhnlichen Bögen fotografisch erfasst werden.

## 6 Schlusswort

Man sieht es dem Regenbogen nicht an, dass viel Physik und Mathematik in ihm steckt und alles nur damit er so schön aussieht, wie wir es uns wünschen. Die Beobachtung von Regenbögen ist nach wie vor ein aktuelles Thema. Dabei sind nicht nur die spektakulären Erscheinungen wie der tertiäre Regenbogen oder weitere Sonderformen von Interesse. Oftmals sind es die kleinen und unscheinbaren Details, die nicht immer gleich ins Auge fallen, aber wertvolle Hinweise liefern können. Bei Regenbögen, die durch inhomogene Tropfen entstehen, ist eine Auswertung dieser Erscheinungen losgelöst von der Physik der Atmosphäre und der Niederschlagsphysik schon gar nicht mehr möglich und auch nicht sinnvoll. Leser die ein Interesse an der Beobachtung von Regenbögen haben, sollten Wert auf eine gute fotografische Dokumentation legen und diese sollte nach Möglichkeit in Serie erfolgen, damit eventuelle Änderungen in Farbe, Form und Struktur mit dokumentiert werden. Der Beobachter kann so einen Beitrag zur Verifizierung und Verfeinerung der Theorien liefern und in zwischenfachlicher Hinsicht kann er das Material zur Präzisierung von Niederschlagsdistribuitionen bereit stellen. Ein Regenbogen ist wie ein Buch, welches Ergebnisse komplexer natürlicher Prozesse mit all seinen Wirkungen und Wechselwirkungen enthält, das nur darauf wartet gelesen zu werden.

## 7 Anmerkungen

<sup>1)</sup> Alle Abbildungen, graphische Darstellungen und mathematischen Symbole wurden aus den entsprechenden Power-Point-Präsentationen entnommen. Weiterhin bestand die Notwendigkeit die Gleichungen und Formeln in den Tabellen mit einem Formeleditor anhand der handschriftlichen Vorlage neu zu erstellen. Zum besseren Verständnis sind in Tab. 3 noch zusätzlich Definitionen und Gleichungen zur Geometrie der Ellipse hinzugefügt. In Tab. 5 wurden die Abbildungen der einfachen Ellipsen mit einem Grafikprogramm neu erstellt. In Tab. 6 bezieht sich die Phrase „GO tertiäre ...“ auf die Anwendung des 3D-GO-Modells speziell auf den tertiären Regenbogen. In Tab. 6 und Tab. 7 erfolgte eine Übersetzung der Grafikinschriften ins Deutsche, wobei in Tab. 7 das Wort „Blanchard“ als Fachbegriff bestehen bleibt. Diese Distribution wurde nach dem Niederschlagsphysiker Duncan C. Blanchard benannt.

<sup>2)</sup> Im Rahmen dieses Aufsatzes ist es nicht möglich den Inhalt dieses Vortrages umfassend zu beschreiben. Die wichtigsten Zusammenhänge und Ergebnisse sind daher in stark schematisierter Form in Tab. 2 und Tab. 3 zusammengefasst. Eine ausführliche und vor allem hervorragend kommentierte theoretische Abhandlung zum Thema Regenbogen findet man bei Adam [11].

<sup>3)</sup>  $r_{EV}$  – Radius bestimmt aus Tropfen gleichen Volumens (EV = equivalent-volume).

<sup>4)</sup> Gelegentlich findet man in der Literatur an Stelle der Mie-Streuung auch den Begriff Lorenz-Mie-Streuung. In beiden Fällen handelt es sich um die gleiche Theorie. Gustav Mie konnte bei der Entwicklung der Streutheorie bereits auf Vorarbeiten des dänischen Physikers Ludvig Lorenz zurückgreifen.

<sup>5)</sup> Die Katastrophentheorie wurde von René Thom (1972) begründet, wovon in der Literatur mehrere Versionen existieren. V. I. Arnold hat diese Theorie für mathematische Probleme weiter entwickelt (u. a. ADE-Klassifikation), R. Thom führte die Entwicklung zur Geometrisierung belebter und unbelebter Vorgänge in der Natur weiter und E.C. Zeeman modellierte Anwendungen in Medizin, Biologie und Soziologie auf der Grundlage dieser Theorie. In neueren Publikationen wird die Katastrophentheorie nicht mehr ausführlich dargestellt, da sie inzwischen in der Bifurkationstheorie aufgegangen ist [22]. Die Katastrophentheorie darf nicht mit der Chaostheorie verwechselt werden.

<sup>6)</sup> Die Tabelle 8 erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Weitere Forschungen zur Erklärung der Regenbögen auf der Grundlage der String-Theorie waren nicht Thema auf der Konferenz, so dass die Liste nach der Katastrophentheorie abgebrochen wurde.

<sup>7)</sup> Die T-Matrix-Methode ist ein numerisches Verfahren. Es ist speziell für die Computersimulation des Lichtstreuverhaltens an zufällig orientierten, axialsymmetrischen und ummantelten Streumaterialien entwickelt worden. Algorithmische Vereinfachungen wie die Linearisierung der Maxwell-Gleichungen, die Betrachtung von Partikeln mit einer ebenen Symmetrie und die Teilung der Matrix in unabhängige Untermatrizen bei Drehungen, erlauben eine schnellere effizientere Berechnung des Streuverhaltens. Die T-Matrix-Methode ist für alle Arten von Partikeln konzipiert. Weitere Informationen hierüber findet man bei Quirantes [29].

<sup>8)</sup> Abbildungen, graphische Darstellungen und mathematischen Symbole wurden aus den entsprechenden Power-Point-Präsentationen entnommen. Handschriftliche Eintragungen in den Grafiken sind zu besserer Lesbarkeit durch Zeichen in Druckschrift ersetzt worden. Formeln in Tab. 11 wurden mit einem Formeleditor anhand der handschriftlichen Vorlage neu erstellt. Die Grafiken und Bilder in Tab. 11 sind entsprechend der Anordnung durchnummeriert. Thematisch zusammengehörende Zeilen und Spalten in Tab. 11 wurden mit der gleichen Hintergrundfarbe unterlegt und unterschiedliche Themen sind mit unterschiedlichen Farbtönen gekennzeichnet. Die Abbildungen Tab. 11, 1. und Tab. 11, 4. stammen ursprünglich von Marston und Trinh [28] und wurden von Feng Xu und James Lock für die Präsentation zitiert. Die Fotos in Tab. 14 wurden freundlicherweise von Claudia Hinz zur Verfügung gestellt. Tab. 15, 1. nach J. F. Padday, wird von Charles L. Adler und James A. Lock zitiert. Tab. 15, 2. Gleichung und Bedeutung der Variablen wurden zusätzlich in die Grafik eingefügt.

<sup>9)</sup> Der Begriff Streukaustik hat hier einen modellhaften Charakter und kommt nur in diesem Artikel zur Anwendung, um deutlich zu machen, dass das beschriebene Helligkeitsmuster aus einer Simulation mittels der Mie-Streuung entstanden ist. Für die Praxis ist es eher unerheblich zu kennen, wie das Helligkeitsmuster entstanden ist. In der freien Natur sind die physikalisch-optischen Prozesse noch komplexer, sodass eine weitere Gliederung des Begriffes Kaustik als nicht notwendig erscheint.

<sup>10)</sup> Alle Gleichungen und Symbole in den Tabellen stammen aus der Powerpoint-Präsentation. Abb. 4 stammt ursprünglich von Xiangzhen Li, Xiang'e Han, Renxian Li, and Huifen Jiang [44] und wurde von John Adam zitiert. Der Text  $n'(r) < 0$ ,  $n'(r) > 0$  nach [38];  $\theta$  (Descartes),  $\theta$  für den Gradientenindex nach [44];  $n(r) = n_0 = \text{constant}$  und  $n(r)$  'ungleich' constant nach [38]; wurde zusätzlich in die Grafik eingefügt. Das Indexprofil  $n(r)$  in Tab. 18 fehlt ursprünglich in der Präsentation und ist für diesen Aufsatz nachträglich berechnet (Tab. 18, 1.) worden. Die Parameter für die Profile in Tab. 19, 1. und Tab. 19, 3. sind im Original von J. Adam nicht angegeben. Für  $D_0(i)$  und  $D_1(i)$  (Tab. 19, 6.) fehlt sogar die Grafik für das Indexprofil  $n(r)$ . An Stelle der fehlenden Grafik enthält Tab. 19, 1. eine Werteliste für die Profile  $n(r)$  und  $rn(r)$  (Tab. 19, 5.), da dieser Fall für weitere Betrachtungen grundlegend ist. Das Indexprofil (Tab. 20, 3.) ist ebenfalls eine nachträglich berechnete Grafik. Die Gleichungen für den Gradientenindex (Tab. 20, 1.) und (Tab. 20, 3.) sind hier auch nachträglich den Grafiken hinzugefügt worden. In Tab. 21 zitiert J. Adam die Abbildungen 2. und 3. aus Adam und Laven [39]. Das von J. Adam benutzte Schema machte eine Anpassung der Gleichungen und Symbole in Tab. 21, 2. erforderlich. Ebenfalls aus Gründen der Übersicht erfolgte die Eintragung der entsprechenden Gleichungen und Symbole in den Abbildungen Tab. 22, 9. und Tab. 22, 10. nach der Powerpointvorlage.

<sup>11)</sup> Es ist aus lizenzrechtlichen Gründen leider nicht möglich die in dem Artikel von Wallker enthaltene Skizze in diesem Aufsatz zu bringen. Es muss daher an dieser Stelle die verbale Beschreibung genügen, welche hierfür aus dem Englischen ins Deutsche übersetzt wurde. Der Name des Beobachters und Autors dieser Beschreibung wurde aus dem Inhaltsverzeichnis der Zeitschrift [50] entnommen.

## 8 Quellen

- [1] Laven, Philip: „Tertiary Rainbows: Do they exist in nature?“, ppt-Vortrag.
- [2] Lee, Raymond L., Jr.: „Visibility of natural rainbows“, ppt-Vortrag.
- [3] Lock, James A.: „Airy theory and Mobius shift extended to rainbows of all orders“, ppt-Vortrag.
- [4] Mie, Gustav: „Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen“  
Annalen der Physik, Folge 4, Vol.25, No.03, (1908), S.377-445.  
URL:<http://diogenes.iwt.uni-bremen.de/vt/laser/papers/Mie-Beitrag-zur-Optik\ -AnnalenPhysik1908.PDF>, (Zugriff: 21. Juli 2010).
- [5] Willerding, Eugen: „Zur Theorie von Regenbögen, Glorien und Halos“  
URL:<http://www.astro.uni-bonn.de/~willerd/regenbogen.pdf> (Zugriff: 21. Juli 2010).
- [6] Cowley, Les: URL:<http://www.atoptics.co.uk/rainbows/ord34.htm>, (Zugriff 21. Juli 2010).
- [7] Bergman, Torbern: “Von den Erklärungen des Regenbogens,” Der königlich schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen aus der Naturlehre, Haushaltungskunst und

- Mechanik, Jg. 21 (1762), S. 231-243.
- [8] Hartwell, Charles: "Description of a tertiary rainbow," American Journal of Science and Arts, Vol. 17, (2nd series, May 1854), p. 56-57.
- [9] Heilermann, Johannes: "Ueber den dritten Regenbogen," Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Jg. 11 (1880), S. 72-73.
- [10] Pedgley, David: „A tertiary rainbow“ Weather: Vol.41, (1986), p.401.
- [11] Adam, John A.: „The mathematical physics of rainbow and glories“ Physics Reports, No.356, (2002), p.229-365,  
URL:[http://www.cems.uvm.edu/~lakobati/AppliedUGMath/rainbow\\_glory\\_review.pdf](http://www.cems.uvm.edu/~lakobati/AppliedUGMath/rainbow_glory_review.pdf),  
(Zugriff: 01. August 2010).
- [12] Können, G.P. & de Boer, J.H.: „Polarized rainbow“ Applied Optics, Vol.18, No.12, (1979), p.1961-1965,  
URL:[http://www.guntherkonnen.com/downloads/1979\\_rainbow\\_AO.pdf](http://www.guntherkonnen.com/downloads/1979_rainbow_AO.pdf),  
(Zugriff: 01. August 2010).
- [13] Nussenzweig, H.M.: „High-Frequenzy Scattering by a Transparent Sphere. I Direct Reflection and Transmission“ Journal of mathematical physics, Vol.10, (1969), p.82-124.
- [14] Nussenzweig, H.M.: „High-Frequenzy Scattering by a Transparent Sphere. II theory of the rainbow and the glory“ Journal of mathematical physics, Vol.10, (1969), p.125-176.
- [15] Möbius, W.: „Zur Theorie des Regenbogens und ihrer experimentellen Prüfung“ Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse Bd.30, No.11, (1907), S.103-256
- [16] Adler, Charles L.; Lock, James A., and Stone, Bradley R.: „Rainbow scattering by a cylinder with a nearly elliptical cross section“, Applied Optics, Vol.37, No.09, (1998), p.1540-1550.
- [17] Lock, J.A.; Adler, C.L.; Stone; B. R. and Zajak, P. D. "Amplification of high-order rainbows of a cylinder with an elliptical cross section," Applied Optics, Vol.37, No.9, (1998), p. 1527-1533
- [18] „CIELUV-Farbraumsystem“, URL:<http://de.wikipedia.org/wiki/CIELUV-Farbraumsystem> (Zugriff: 05. September 2010).
- [19] Feng Xu and Lock, James A.: „Computed first order rainbow of an oblate spheroidal particle using Lorenz-Mie-Debye Theory“, ppt-Vortrag.
- [20] Triebel, H.: „Analysis und mathematische Physik“, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 2. Aufl., Leipzig, (1984), „Singularitätstheorie“, S.396-411, „Katastrophe: Theorie und Anwendung“, S.411-429.
- [21] „Katastrophentheorie (Mathematik)“, URL:[http://de.wikipedia.org/wiki/Katastrophentheorie\\_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Katastrophentheorie_(Mathematik)), (Zugriff: 25.09.2010).
- [22] Jetschke, G.: „Katastrophentheorie“, S.203-214, in: „Mathematik der Selbstorganisation“, Verlag Harri Deutsch, 2.korrigierte und erweiterte Auflage, Frankfurt am Main (2009).
- [23] Schmidt, Rainer: „Regenbögen auf der 10. Konferenz „Licht und Farbe in der Natur“ Teil 1 – Der tertiäre Regenbogen“, Meteoros, Jg.13, Nr.9, (2010), S. 186 – 198.
- [24] Berry, M. V. and Upstill, C.: „Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns“, p.257-346 in: E. Wolf: „Progress in Optics“, Amsterdam, Vol.18, (1980), [Tabl. 1, p.268], URL:[http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry089.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry089.pdf), (Zugriff: 25.09.2010).
- [25] Berry, M. V. „Generalized rainbows in wave physics: how catastrophe theory has helped“, in: Rainbows and catastrophes, ed. N Neskovic, Boris Kidric Institute, Belgrade, (1990), p.19-23, URL:[http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry199.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry199.pdf), (Zugriff: 25.09.2010),
- [26] Berry, M. V. and Klein, S.: „Die Farben von Kaustiken: Katastrophen in Regentropfen und Strukturglas“, Physikalische Blätter, Weinheim, Bd.53, H.11, (1997), S.1095-1098, URL:[http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry287.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry287.pdf),

- (Zugriff:25.09.2010).
- [27] Berry, M. V. and Howls, C. J.: „Axial and focal-plane diffraction catastrophe integrals“, *Journal of physics; Series A: Mathematical and theoretical*, Bristol, Vol.43, (2010), 375206 (13pp),  
URL:[http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv/the\\_papers/Berry425.pdf](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv/the_papers/Berry425.pdf).  
(Zugriff: 25.09.2010).
- [28] Marston, P. L.; Trinh, E. H.: „Hyperbolic umbilic diffraction catastrophe and rainbow scattering from spheroidal drops“, *Nature*, London, Vol. 312, (1984), p.529-531.
- [29] Quirantes, Arturo: „A T-matrix and computer code for randomly oriented, axially symmetric coated scatters“, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, Vol. 92, (2005) p.373-381  
URL:<http://www.ugr.es/~aquiran/ciencia/arti16.pdf>, (Zugriff: 17.09.2010).
- [30] Airy-Funktion: URL:<http://de.wikipedia.org/wiki/Airy-Funktion>, (Zugriff: 06.10.2010).
- [31] Feng Xu; Lock, James A. and Tropea, Cameron:  
„Debye series for light scattering by a spheroid“, *Journal of the Optical Society of America*, New York, NY, Series A, Vol.27, No.4, (2010), p.671- 686.
- [32] Lock, James A; Feng Xu: „Optical caustics observed in light scattering by an oblate spheroid“, *Applied Optics*, Washington, DC, Vol.49, Issue 8, (2010), p.1288-1304.
- [33] Minnaert, Marcel: „X. Regenbogen, Ringe, Kränze, Heiligenschein“, S. 239-316, in: „Licht und Farbe in der Natur“, deutsche Ausgabe, Birkhäuser Verlag, Basel (1992).
- [34] Manig, Rüdiger:„Roter Regenbogen an der Wetterwarte Neuhaus/Rwg.“,  
(Foto, Meteoros-Bildarchiv),  
URL:[http://www.meteoros.de/bildarchiv/image.php?page=2&gallery\\_id=51&image\\_id=1831](http://www.meteoros.de/bildarchiv/image.php?page=2&gallery_id=51&image_id=1831),  
(Zugriff: 08.10.2010).
- [35] Hinz, Claudia: „Regenbogenfragmente“, (Foto, Meteoros-Bildarchiv),  
URL:[http://www.meteoros.de/bildarchiv/image.php?page=1&gallery\\_id=51&image\\_id=1951](http://www.meteoros.de/bildarchiv/image.php?page=1&gallery_id=51&image_id=1951),  
(Zugriff: 08.10.2010).
- [36] Adler, Charles L.; Lock, James A. and Fleet, Richard: „External Reflection Rainbow Caustics“, ppt-Vortrag.
- [37] Padday, J.F.: „The profiles of axially symmetric menisci“, *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, Series A, Vol.269, (1971), p.265-293.
- [38] Adam, John A.: „On the existence of single and twin zero-order rainbows in radially inhomogeneous spheres“, ppt-Vortrag.
- [39] Adam, John A. and Laven, Philip: „Rainbows from inhomogeneous transparent spheres: a ray-theoretical approach“, *Applied Optics*, Washington DC, Vol.46, Issue 6, (2007), p.922-929.
- [40] „Die Salinität (Salzgehalt) des fertigen Wassers ist auf jeden Fall zu kontrollieren“  
URL:[http://www.aquacare.de/produkte/salz/d1meers.htm#Woraus besteht Meerwasser](http://www.aquacare.de/produkte/salz/d1meers.htm#Woraus%20besteht%20Meerwasser)  
(Zugriff: 27.10.2010)
- [41] „9.2 Brechungsindex“,  
URL:[http://www.wissenschaft-technik-ethik.de/wasser\\_eigenschaften.html#kap092](http://www.wissenschaft-technik-ethik.de/wasser_eigenschaften.html#kap092)  
(Zugriff: 09.09.2010)
- [42] neoLab  
URL:<http://www.neolab.de/nshopartdetails.do;jsessionid=aZQLDK-dp-k4-c-D0T?kgrpId=9086>  
(Zugriff:27.10.2010).
- [43] Refraction Index of Various Substances for 3D modelers,  
URL:<http://www.robinwood.com/Catalog/Technical/Gen3DTuts/Gen3DPages/RefractionIndexList.html>, (Zugriff: 29.10.2010).
- [44] Xiangzhen Li, Xiang'e Han, Renxian Li, and Huifen Jiang:  
„Geometrical-optics approximation of forward scattering by gradient-index spheres“  
*Applied Optics*, Washington DC, Vol.46, Issue 22, (2007), p.5241-5247.
- [45] Born, Max and Emil Wolf: „Principles of Optics“, „3.2.1 The differential equation of light rays“, Cambridge, 7<sup>th</sup> expanded edition, (2009), p.129-132.

- [46] Hinz, Claudia: „Regenbogenfragment“ (Foto, Meteoros-Bildarchiv),  
URL:[http://www.meteoros.de/bildarchiv/image.php?page=2&gallery\\_id=51&image\\_id=1755](http://www.meteoros.de/bildarchiv/image.php?page=2&gallery_id=51&image_id=1755)  
(Zugriff: 01.12.2010).
- [47] Minnaert, Marcel: „X. Regenbogen, Ringe, Kränze, Heiligenschein“, S. 239-316, in:  
„Licht und Farbe in der Natur“, deutsche Ausgabe, Birkhäuser Verlag, Basel (1992).
- [48] Stöcker, H.: „Taschenbuch der Physik“, 5. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (2007), S.720.
- [49] Volz, F.E.: "Einige Beobachtungen ungewöhnlicher Regenbogen und Hinweise auf  
wünschenswerte Beobachtungen",  
Meteorologische Rundschau: ISSN:0026-1211, Berlin, Bd.13, H.4, (1960), S.117-118.
- [50] Wallker, Arthur H.: "Six Rainbows Seen at Once"  
Quarterly journal of the Royal Meteorological Society, ISSN:0035-9009, London,  
Vol.40, Issue 169, (1914), p.75-75.
- [51] Corliss, William R.: „Rare halos, mirages, anomalous rainbows and related electro- magnetic  
phenomena: A catalog of geophysical anomalies“, ISBN:0-915554-01-1,  
Sourcebook Project, Glen Arm Maryland, (1984), GEB 1, X3, p.8.